Feuille d'exercices 10
Calcul matriciel

Manipulations basiques

Exercice 1. Calculer les expressions suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4&-5\end{pmatrix}\quad B=\left[\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&-2&2\\3&-3&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\right]\times\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&1&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&4&-1\\2&1&2\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}1+i&2-i&i\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1-i&2\\1&i\\-i&1+3i\end{pmatrix}\qquad F=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&b&a\\1&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&a&c\\1&b&b\\1&c&a\end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit $G=\left\{\begin{pmatrix}2^x&0&0\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}$.

1. Montrer G est stable par produit.
2. Montrer que les matrices de G commutent.
3. Montrer que les matrices de G sont inversibles et que leurs inverses sont encore des éléments de G.

Exercice 3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit encore une matrice symétrique.

Exercice 4. Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 5.

1. Trouver toutes les matrices A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2=A$.
2. Trouver toutes les matrices B de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $B^2=I_2$.

Exercice 6. Soit $E_{ij}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en position (i,j) qui vaut 1. Pour tous les indices i,j,k,l de $\{1,\dots,n\}$, calculer $E_{ij}E_{kl}$.

Exercice 7. Soit $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. Calculer A^2 et vérifier que $A^2=A+2I_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 8. Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $\omega=\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$. On pose

$$A=\left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C}).$$

Calculer $A\overline{A}$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 9. Soit pour $\theta\in\mathbb{R}$, $A(\theta)=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}$. Calculer $A(\theta)^n$.

Exercice 10. Pour $x\in\mathbb{R}$, on note $A=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(x)&\mathrm{sh}(x)\\\mathrm{sh}(x)&\mathrm{ch}(x)\end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 11. Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ et soit $B=A-I_3$.

1. Calculer B^2, B^3.
2. Pour $n\in\mathbb{N}$, développer $(B+I_3)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
3. En déduire A^n pour tout entier $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 12. On considère la matrice

$$A=\begin{pmatrix}-1&-2\\3&4\end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2-3A+2I_2$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Pour $n\geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par X^2-3X+2.
3. En déduire l'expression de la matrice A^n.

Exercice 13. On considère la matrice $M=\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&-3&2\\-1&2&0\end{pmatrix}$. Vérifier que $(M-I)(M+3I)=0$. En déduire M^n.

Exercice 14. On considère dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer J^2 puis déterminer les puissances de J.
2. En déduire à l'aide de la formule du binôme de Newton, les puissances de la matrice $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.