Feuille d'exercices 11
Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases}2x+y+z=3\\3x-y-2z=0\\x+y-z=-2\\x+2y+z=1\end{cases}\qquad (S_2)\begin{cases}2x+y+z+t=1\\x+2y+3z+4t=2\\3x-y-3z+2t=5\\5y+9z-t=-6\end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases}x-y+z+t=5\\2x+3y+4z+5t=8\\3x+y-z+t=7\end{cases}\qquad (S_4)\begin{cases}x+2y+3z=0\\2x+3y-z=0\\3x+y+2z=0\end{cases}$$

$$(S_5)\begin{cases}2x+5y-8z=8\\4x+3y-9z=9\\2x+3y-5z=7\\x+8y-7z=12\end{cases}\qquad (S_6)\begin{cases}x+y=1\\y+z=0\\x-y=1\\2x+3y=0\end{cases}$$

$$(S_7)\begin{cases}2x+2y-z+t=4\\4x+3y-z+2t=6\\8x+5y-3z+4t=12\\3x+3y-2z+2t=6\end{cases}\qquad (S_8)\begin{cases}2x+7y+3z+t=5\\x+3y+5z-2t=3\\x+5y-9z+8t=1\\5x+18y+4z+5t=12\end{cases}$$

$$(S_9)\begin{cases}x+y+z+t=1\\x-y+2z-3t=2\\2x+4z+4t=3\\2x+2y+3z+8t=2\\5x+3y+9z+19t=6\end{cases}\qquad (S_{10})\begin{cases}3x+6y+5z+6t+4u=14\\5x+9y+7z+8t+6u=18\\6x+12y+13z+9t+7u=32\\4x+6y+6z+5t+4u=16\\2x+5y+4z+5t+3u=11\end{cases}$$

$$(S_{11})\begin{cases}2x+y-z+t=1\\3x-2y+2z-3t=2\\5x+y-z+2t=-1\\2x-y+z-3t=4\end{cases}\qquad (S_{12})\begin{cases}x+y+z+t+u=7\\3x+2y+z+t-3u=-2\\y+2z+2t+6u=23\\5x+4y+3z+3t-u=12\end{cases}$$

$$(S_{13})\begin{cases}x+3y-2z+5t-7u=3\\x+2y-9z+4t-6u=-1\\2x-y+7z-3t+5u=2\\x-y-2t+3u=2\end{cases}\qquad (S_{14})\begin{cases}x+3y+2z=0\\2x-y+3z=0\\3x-5y+4z=0\\x+17y+4z=0\end{cases}$$

Exercice 2. Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & \cdots & + & x_n & = & 1\\
x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & \cdots & + & 2x_n & = & 1\\
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & + & \cdots & + & 3x_n & = & 1\\
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & \cdots & + & 4x_n & = & 1\\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & \cdots & + & nx_n & = & 1
\end{array}\right.$$

Exercice 3. Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{C}$, les systèmes d'inconnues complexes suivants :

$$a)\begin{cases}x-y+z=m\\x+my-z=1\\x-y-z=1\end{cases}\qquad b)\begin{cases}mx+y+z=1\\x+my+z=m\\x+y+mz=m^2\end{cases}$$

$$c)\begin{cases}mx+y+z+t=1\\x+my+z+t=m\\x+y+mz+t=m+1\end{cases}\qquad d)\begin{cases}x+y+mz=m\\x+my-z=1\\x+y-z=1\end{cases}$$

$$e)\begin{cases}x+y+(1-m)=m+2\\(1+m)x-y+2z=0\\2x-my+3z=m+2\end{cases}$$

Exercice 4. Dans l'espace euclidien rapporté à un repère othonormée $(0,\vec{i}\vec{j})$, soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+y+z+1=0$ et $\mathscr{P}'$ la plan d'équation $x+2y+3z=0$. Déterminer et décrire géométriquement l'intersection de ses deux plans.

Exercice 5. Soient $a_1,\dots,a_n$ des points du plan complexe. Déterminer à quelle(s) condition(s) il existe un polygone n sommets d'affixes $z_1,\dots,z_n$ tel que : a_i est le milieu de $[z_i,z_{i+1}]$ et a_n est le milieu de $[z_n,z_1]$.

Exercice 6. Discuter des solutions et résoudre suivant les valeurs de λ,a,b,c,d le système suivant :

$$\begin{cases}(1+\lambda)x+y+z+t=a\\x+(1+\lambda)y+z+t=b\\x+y+(1+\lambda)z+t=c\\x+y+z+(1+\lambda)t=d\end{cases}$$

Matrices

Exercice 7. Calculer la réduite et le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} i & i & i & i & i & i \\ 1-i & 1 & 1-i & 1 & 1-i & 1 \\ 2i & 1 & 2 & -1 & i & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Discuter suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & \lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 9. Dire si les matrices suivantes sont inversibles et donner leurs inverses le cas échéant.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & 1 & a & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & a \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que P est inversible et déterminer son inverse. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire les puissances de la matrice A.