Feuille d'exercices 12
Ensembles et applications

Ensembles

Exercice 1. Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que

1. $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B$
2. $A \cap B = A \cup B \quad \Rightarrow \quad A = B$
3. $A \cup B = A \cap C \quad \Leftrightarrow \quad B \subset A \subset C$

Exercice 2. Soit E un ensemble et $a \in E$. Déterminer $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{a\}))$.

Exercice 3. Soit E un ensemble. Montrer par contraposition les assertions suivantes.

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \quad \Rightarrow \quad A = B,$
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad ([A \cap B = A \cap C] \wedge [A \cup B = A \cup C]) \quad \Rightarrow \quad B = C.$

Exercice 4. Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Exercice 5. Soient E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que $C_E(A) \setminus C_E(B) = B \setminus A$.

Exercice 6. Déterminer chacun des ensembles suivants.

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3, 3 + \frac{1}{n^2}\right], \qquad I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-2 - \frac{1}{n}, 4 + n^2\right]$$

$$I_3 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right], \qquad I_4 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, n\right]$$

Applications

Exercice 7. Soient f et g les éléments de $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ définis pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$f(n) = n + 1; \qquad g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n - 1 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Etudier l'injectivité et la surjectivité de ces applications.
2. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 8. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$1)\ h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y) \end{array} \qquad 2)\ k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x+1}{x-1} \end{array}$$

Exercice 9. Soient A, B deux parties de E. Démontrer que les fonctions suivantes sont des fonctions caractéristiques et déterminer l'ensemble qu'elles caractérisent.

1. $\min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$
2. $\max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$
3. $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
4. $1 - \mathbb{1}_A$
5. $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
6. $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$

Exercice 10. Soit $f \in\in \mathscr{F}(E, F)$ et $A \subseteq E$.

1. Montrer que si f est injective alors $f(C_E(A)) \subset C_F(f(A))$.
2. Montrer que si f est surjective alors $C_F(f(A)) \subset f(C_E(A))$.

Exercice 11. Soient f une application de E dans F et $A \subseteq E$, $B \subseteq F$. Montrer que

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B.$$

Exercice 12. Soient E, F et G trois ensembles, $f \in \mathscr{F}(E, F)$, $g \in \mathscr{F}(F, G)$. Démontrer les assertions suivantes.

1. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
3. Si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.
4. Si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.

Relations d'équivalence

Exercice 13.

1. Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par :
$$(a, b)\mathcal{R}(a', b') \quad \Leftrightarrow \quad a + b' = b + a'.$$
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Décrire les classes d'équivalences.
2. Mêmes questions avec $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et la relation :
$$(p, q)\mathcal{R}(p', q') \quad \Leftrightarrow \quad pq' = p'q.$$

Exercice 14. Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par : $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \quad \Leftrightarrow \quad y = y'$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 15. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $x\mathcal{R}y \iff xe^y = ye^x$ est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x.