Feuille d'exercices 13
Analyse asymptotique

Comparaisons de suites

Exercice 1. Classer les suites dont les termes généraux sont les suivants par ordre de négligeabilité.

1. $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{\ln(n)}{n}$, $\frac{\ln n}{n^2}$, $\frac{1}{n\ln(n)}$
2. n, n^2, $n\ln(n)$, $\sqrt{n}\ln(n)$, $\frac{n^2}{\ln(n)}$

Exercice 2. Trouver un équivalent simple des suites suivantes.

1. $u_n = \frac{n^3-\sqrt{n^2+1}}{\ln(n)-2n^2}$
2. $u_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n+1}$
3. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$
4. $u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$
5. $u_n = 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)$
6. $u_n = \frac{n!+\mathrm{e}^n}{2^n+3^n}$
7. $u_n = \ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)$
8. $u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{n^2-n+1}}$
9. $u_n = \frac{2n^3-\ln(n)+1}{n^2+1}$
10. $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
11. $u_n = (n+3\ln(n))\,\mathrm{e}^{-(n+1)}$
12. $u_n = \frac{(1-\mathrm{e}^{1/n})\sin\frac{1}{n}}{n^2+n^3}$
13. $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$
14. $u_n = \sqrt{\ln(n+1)-\ln(n)}$

Exercice 3. Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par :

1. $u_n = n\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)}$
2. $u_n = \left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$
3. $u_n = \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels telle que $u_n+u_{n+1}\sim\frac{1}{n}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0^+.
2. Donner un équivalent simple de u_n.

Comparaisons de fonctions

Exercice 5. Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes en $+\infty$:

1. $\frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}}$
2. $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$
3. $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$
4. $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}-1$
5. $\sqrt{\ln(x+1)}-\sqrt{\ln(x-1)}$
6. $x\ln(x+1)-(x+1)\ln(x)$

Exercice 6. Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes en 0

1. $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$
2. $\tan(x)-\sin(x)$
3. e^x+x-1
4. $\ln(1+\sin(x))$
5. $\ln(\mathrm{e}+x)$
6. $\ln(\ln(1+x))$
7. $\mathrm{e}^{\tan(x)}-\mathrm{e}^{\sin(x)}$
8. $\frac{\arctan(x^2-x^2\cos x)}{1-\sqrt{\cos x}}$
9. $\ln^2(x+1)-\ln^2(1-x)$

Exercice 7. Déterminer un équivalent de $\ln(\cos(x))$ en $(\pi/2)^-$

Exercice 8. A l'aide d'équivalents, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\,\mathrm{e}^{-x}+x^2}{x-\ln(x)}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln(x)-x}{x+\cos(x)}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x\,\mathrm{e}^x-x^2}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$

Exercice 9. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\ln(x)}}{\ln(x)}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)^{\frac{\ln(x)}{x}}$
3. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x+\sin(x)}{x\ln(x)}$
4. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(x)+x^2}{\ln(x+x^2)}$
5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x^2-1}$

Exercice 10. Etudier les branches infinies de

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{|x-1|+x} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{(x+1)\ln(x+1)}{\ln(x)}.$$

Calcul de développement limité

Exercice 11. Déterminer les développements limités suivants :

1. $\mathrm{DL}_3(\pi/4)$ de $x\mapsto\sin(x)$
2. $\mathrm{DL}_4(1)$ de $x\mapsto\frac{\ln(x)}{x^2}$
3. $\mathrm{DL}_5(0)$ de $x\mapsto\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(2x)-\mathrm{ch}(x)$
4. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x\mapsto\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$
5. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x\mapsto(1+x)^{1/x}$
6. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x\mapsto\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$
7. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x\mapsto\ln(2+\sin(x))$
8. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x\mapsto\sqrt{3+\cos(x)}$
9. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x\mapsto\ln(1+\mathrm{e}^x)$
10. $\mathrm{DL}_3\left(\frac{\pi}{3}\right)$ de $x\mapsto\cos(x)$
11. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x\mapsto\ln(1+\sin(x))$
12. $\mathrm{DL}_3(1)$ de $x\mapsto\cos(\ln(x))$
13. $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x\mapsto\ln\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}\right)$
14. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x\mapsto\ln(3\,\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$
15. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x\mapsto\ln(1+\sqrt{1+x})$
16. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x\mapsto\frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x-1}$
17. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x\mapsto\frac{\arctan(x)}{\tan(x)}$
18. $\mathrm{DL}_2(1)$ de $x\mapsto\frac{x-1}{\ln(x)}$

19. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \frac{x-\sin(x)}{1-\cos(x)}$
20. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\exp(x)-1}$
21. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \frac{x\,\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)-1}$
22. $\mathrm{DL}_4(1)$ de $x \mapsto \mathrm{e}^x$

Exercice 12. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 13. Soit $f \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$.

1. Déterminer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$.
2. En déduire les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

Application à l'étude de fonctions

Exercice 14. A l'aide de développements limités, déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au voisinage de 0 :

1. $x \mapsto x(2+\cos(x)) - 3\sin(x)$
2. $x \mapsto x^x - (\sin(x))^x$
3. $x \mapsto \arctan(2x) - 2\arctan(x)$
4. $\arctan\sqrt{1+x} - \arctan\sqrt{1-x}$

Exercice 15. A l'aide de développements limités, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - x - \cos(x)}{x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3(x)}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\cosh\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+2} - x$

Exercice 16. Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$$

peut être prolongée en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Préciser l'équation de la tangente en $x = 0$ et la position de cette tangente et de la courbe.

Exercice 17. On note f la fonction définie par $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{x^2}{\mathrm{sh}(x)}.$$

1. Calculer un développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.
2. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser la position relative au voisinage de 0 du graphe de f par rapport à sa tangente en 0.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
4. Faire l'étude complète de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18. Soit $f :]-1, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0. Quelle est alors la position relative de la courbe f par rapport à sa tangente en ce point ?

Exercice 19. Soient a un réel non nul et f la fonction définie au voisinage de 0 par

$$f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{1+x}.$$

Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles f présente un point d'inflexion en 0.

Exercice 20. Soient f, g, h les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x^x, \quad g(x) = x^{f(x)} \quad \text{et} \quad h(x) = x^{g(x)}$$

Déterminer les limites en 0 de ces trois fonctions.

Exercice 21. Etudier le comportement des fonctions suivantes (existence d'asymptote ou de tangente et position relative) à l'endroit indiqué :

1. $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ en 0.
2. $x \mapsto \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ au voisinage de 0.
3. $x \mapsto 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$.
4. $x \mapsto \frac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$ en $+\infty$.
5. $x \mapsto \frac{\arctan(x)}{\sin^3(x)} - \frac{1}{x^2}$ en 0.
6. $x \mapsto \frac{x\ln(x)}{x^2-1}$ sur $\mathbb{R}$.
7. $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t$ en $+\infty$ (donner un dev. asymptotique avec trois termes).
8. $x \mapsto x^{1-\frac{1}{x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.
9. $x \mapsto \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}$ en $+\infty$.
10. $x \mapsto x\big(\ln(2x+1) - \ln(x)\big)$ en $+\infty$.
11. $x \mapsto \frac{x^3+2}{x^2-1}$ en $+\infty$.
12. $x \mapsto (x+1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$ en $+\infty$.
13. $x \mapsto x^3\arctan\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$ en $+\infty$.