Feuille d'exos 20
Arithmétique et dénombrement

Arithmétique

Exercice 1. Quel est le chiffre des unités de 19971997^{10} ?

Exercice 2. Soit $n > 0$.

1. Montrer que 11 divise $2^{6n+3} + 3^{2n+1}$.
2. Montrer que 8 divise $5^n + 2.3^{n-1} + 1$.
   On pourra discuter suivant si n est pair ou non.

Exercice 3. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que :

1. $n | n+8$
2. $n-1 | n+11$
3. $n-3 | n^3-3$
4. $n-1 | n^2+1$

Exercice 4. Soit a, b deux entiers tels que $a^2 | b^2$. Montrer que $a | b$.

Exercice 5. Montrer que si $2^a - 1$ est premier alors a est premier.

Exercice 6. Calculer le $PGCD$ des couples de nombres suivants :

126 et 230   390 et 720   180 et 606

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{N}$: $\begin{cases} PGCD(a,b) = 18 \\ a+b = 360 \end{cases}$ et $\begin{cases} PGCD(a,b) = 18 \\ ab = 3240 \end{cases}$

Exercice 8. Calculer $a = PGCD(720, 252)$ et $b = PPCM(720, 252)$. Donner deux entiers u, v tels que $720u + 252v = a$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

$$7x - 9y = 1, \qquad 7x - 9y = 6, \qquad 11x + 17y = 5$$

Exercice 10. Montrer que l'intervalle $[\![n!+2, n!+n]\!]$ (pour $n \geqslant 2$) ne contient aucun nombre premier.

Exercice 11. [Petit théorème de Fermat] Soit p un nombre premier.

1. Montrer que $\binom{p}{k}$ est divisible par p pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^p - n$ est divisible par p.
3. En déduire que si n n'est pas divisible par p alors p divise $n^{p-1} - 1$.

Exercice 12. Prouver que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, la fraction $\dfrac{21m+4}{14m+3}$ est irréductible.

Dénombrement

Exercice 13. Une tentative d'homicide par balle a eu lieu au cours d'un bal. La police a demandé à chacune des 18 personnes présentes les questions suivantes : Avez-vous entendu une détonation ? Avez-vous vu quelqu'un s'enfuir ?
Dix personnes ont répondu « oui » à la première question, six personnes ont répondu « non » à la deuxième question, cinq personnes ont répondu « non » aux deux questions.
Combien de personnes ont répondu « oui » aux deux questions ?

Exercice 14. Un jeu de cartes contient 32 cartes. Un magicien en tire trois successivement, sans remise et les dispose dans l'ordre des tirages sur la table. Combien de présentation de ces trois cartes contiennent au moins un coeur ?

Exercice 15. Une urne contient 6 boules blanches numérotées de 1 à 6 et 5 boules noires numérotées de 1 à 5. On tire successivement 4 boules sans remise en notant l'ordre d'apparition des boules. Combien de résultats amènent 3 boules blanches et une boule noire ?

Exercice 16.

1. Combien y a-t-il de mots :
   (a) de 6 lettres écrits avec les lettres A, B, C, D, E, F (sans remise) ?
   (b) de 5 lettres écrits avec deux A, trois B ?
   (c) de 6 lettres écrits avec exactement deux A, trois B ?
   (d) de 6 lettres écrits avec deux A, trois B, un C ?
2. Combien existe-t-il d'anagrammes du mot chaise ?
3. Combien existe-t-il d'anagrammes du mot anagramme ?

Exercice 17. Un jeu comporte 32 cartes dont 8 par couleur (coeur, pique, carreau, trèfle). Une main est constituée de 8 cartes non ordonnées.

1. Quel est le nombre de mains possibles ?
2. Combien de mains contiennent au moins un as ?
3. Combien contiennent exactement un roi ?
4. Combien contiennent au moins un coeur ou une dame
5. Combien ne contiennent que des cartes de 2 couleurs au plus ?

Exercice 18. Un tiroir contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. On choisit deux chaussures au hasard et simultanément.

1. Combien y a t-il de tirages possibles ?
2. Combien amènent deux chaussures de la même couleur ?
3. Combien amènent un pied gauche et un pied droit ?
4. Combien permettent de reconstituer une vraie paire de chaussures ?

Exercice 19. Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires indiscernables. On tire successivement 6 boules de l'urne en remettant systématiquement la boule tirée.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Combien de ces résultats amènent :
   (a) 5 boules blanches et une boule noire, dans cet ordre ?
   (b) 1 boule noire au plus ?
   (c) 3 boules blanches et 3 boules noires ?
   (d) une boule blanche au moins ?
3. Reprendre les questions précédentes en supposant à présent les boules blanches numérotées de 1 à 5 et les boules noires numérotées de 6 à 13.

Exercice 20. Dix livres deux à deux distincts sont placés côte à côte sur une étagère. Quel est le nombre de dispositions qui placent côte à côte trois livres fixés de la collection ?

Exercice 21. Dans une soirée, n couples se rencontrent et se saluent. Chaque personne serre (une seule fois) la main de chacune des autres (sauf celle de son conjoint). Combien y aura-t-il de poignées de main échangées ?

Exercice 22. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1;n]\!]$. On note $S(n,p)$ le nombre de surjections entre un ensemble de cardinal n dans un ensemble de cardinal p.

1. Calculer $S(n,1)$.
2. Montrer que si $n \geqslant 2$, $S(n,2) = 2^n - 2$.
3. On suppose $n \geqslant p+1$. En discutant le nombre d'éléments ayant un antécédent, justifier que
$$S(n,p+1) = (p+1)^n - \sum_{k=1}^{p} \binom{p+1}{k} S(n,k)\,.$$
4. Application : de combien de façons peut-on répartir un groupe de 10 personnes en trois groupes numérotés 1, 2 et 3 de sorte qu'il y ait au moins une personne dans chaque groupe ?

Exercice 23. Trois élèves ont laissé leur blouse en TP de biologie. La semaine suivante, chacun d'eux en prend une au hasard.

1. Calculer le nombre de façons qu'ils ont de les choisir de sorte pour qu'exactement un élève retrouve sa blouse ?
2. Calculer le nombre de façons qu'ils ont de les choisir de sorte pour qu'exactement deux élèves retrouvent leur blouse ?
3. Calculer le nombre de façons qu'ils ont de les choisir de sorte pour qu'exactement les trois élèves retrouvent leur blouse ?
4. En déduire le nombre de façons qu'ils ont de les choisir pour qu'aucun élève ne retrouve sa blouse.
5. Calculer le nombre de façons qu'ils ont de les choisir pour qu'aucun élève ne retrouve sa blouse, lorsqu'ils ont été quatre à l'avoir oubliée.

De combien de façons peuvent-ils les choisir de sorte que l'un au moins d'entre eux retrouve sa blouse ?

Exercice 24. On dispose 4 pions numérotés de 1 à 4 sur 3 cases numérotées de 1 à 3. Une case peut éventuellement contenir plusieurs pions. De combien de façons peut-on opérer de sorte qu'une case au moins soit vide.

Exercice 25. Soient $p,q \in \mathbb{N}$ et soient E et F deux ensembles disjoints ayant respectivement p et q éléments, et r un entier tel que $r \leqslant p+q$. (Remarque : un ensemble à 0 élément est l'ensemble vide.)

1. En dénombrant de deux façons le nombre de parties à r éléments de $E \cup F$, montrer que
$$\sum_{i=0}^{r} \binom{p}{i}\binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r} \qquad \text{(Formule de Vandermonde)}$$
2. En déduire une expression simple de $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$

Exercice 26.

1. Trouver le nombre d'applications (respectivement de surjections) de $\{1,2,3\}$ sur $\{a,b\}$. Expliciter les surjections.
2. Donner en extension l'ensemble des partitions de $\{1,2,3\}$ en deux parties.

Exercice 27. On considère une urne contenant a boules blanches et b boules noires. On tire les boules une à une successivement, sans remise, jusqu'à vider l'urne.

1. Combien y a t'il de tirage possibles ?
2. Combien de tirages amènent la dernière boule blanche en k-ième position ?
3. En déduire $\sum_{k=a}^{a+b} \binom{k-1}{a-1} = \binom{a+b}{a}$