Feuille d'exos 23
Intégration

Propriétés de l'intégrale

Exercice 1. Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = f(c).$$

Exercice 2. Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \Leftrightarrow \qquad f \leqslant 0 \;\text{ OU }\; f \geqslant 0.$$

Exercice 3. Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que $x \to \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$ est lipschitzienne.

Limite d'intégrales

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_{-x}^{x}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t.$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$
   On pourra comparer le logarithme à une vitesse polynomiale bien choisie.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$
   Utiliser la continuité de l'exponentielle pour l'encadrer entre 1 et $1+\varepsilon$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{e^{1/t}}{t}\,\mathrm{d}t$
   Se ramener au cas précédent par un changement de variable.
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\cos(1/t)}{t}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 5. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Sommes de Riemann

Exercice 7. Déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

$$a)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} \qquad b)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2} \qquad c)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$$

$$d)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+nk^2} \qquad e)\ \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 8. Soit $\alpha > 0$. A l'aide des sommes de Riemann, déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$.

Suite définie par une intégrale

Exercice 9. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^{\mathrm{e}} \ln^n(x)\,\mathrm{d}x$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Etablir une relation entre I_n et I_{n+1}.
3. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < I_n < \frac{e}{n+1}.$$
4. Déterminer la limite puis un équivalent simple de (I_n).

Exercice 10. Pour tout entier n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ln(2)$ et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en écrivant $\ln(2) - u_n$ sous la forme d'une intégrale, montrer que
$$\frac{1}{3\,(n+1)} \leqslant \ln(2) - u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
5. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Formule de Taylor

Exercice 11. Montrer que pour tout $x \in]-1;1]$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}.$$

Exercice 12. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

Fonction dont la variable est une borne d'intégration

Exercice 14. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \sin(x)\int_0^x \cos(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \cos(x)\int_0^x \sin(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.
4. Achever la résolution de cette équation différentielle.

Exercice 15. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\varphi(t) = \frac{\mathrm{sh}(t)}{t}, \text{ pour } t \neq 0 \text{ et } \varphi(0) = 1$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f.
3. Justifier que f est $\mathscr{C}^2$ et calculer $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 16. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \neq 0,\ F(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F peut être prolongée par continuité en 0. On effectue ce prolongement.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et exprimer $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
3. Montrer que F est dérivable en 0 et observer que $F'(0) = 0$.

Intégration et algèbre linéaire

Exercice 17. Soit $E = \mathscr{C}(\mathbb{R})$, $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ et $T : \begin{cases} E & \to E \\ f & \mapsto T(f) \end{cases}$ avec

$$T(f) \quad : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_0^{3x} f(t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

1. Montrer que $T \in \mathscr{L}(E)$.
2. Soit f dans E, montrer que $T(f)$ est dérivable. Quelle est sa dérivée ?
3. T est-elle surjective ? Injective ?

Exercice 18. Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ et soit φ l'application définie pour tout $f \in E$ par $\varphi(f) = g$ avec :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Etudier l'injectivité et la surjectivité de φ.
3. Montrer que si f est bornée alors $\varphi(f)$ aussi.
4. Montrer que si $f \in E$ admet une limite l en $+\infty$ alors $\varphi(f)$ tend également vers l en $+\infty$.