Feuille d'exos 26
Géométrie du plan

Repérage dans le plan

Exercice 1. [Coordonnées polaires]

1. Placer dans le plan les points dont on donne un système de coordonnées polaire (ρ,θ) : $M_1(2,\pi/4)$, $M_2(-1,-\pi)$, $M_3(-2,3\pi/4)$, $M_4\left(3,\frac{\pi}{12}\right)$, $M_5\left(-1,\frac{7\pi}{8}\right)$. Déterminer les coordonnées cartésiennes de chacun de ces points.
2. Déterminer un système de coordonnées polaires des points suivants dont on donne les coordonnées cartésiennes : $A_1(2,0)$, $A_2(3,-3)$, $A_3(-1,\sqrt{3})$.

Exercice 2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère le point $\Omega(1,-1)$ et les vecteurs $\vec{u}(1,2)$ et $\vec{v}(-2,3)$.

1. Montrer que $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ est un repère direct. Est-il orthonormal ?
2. Soit $A(5,6)$ et $\vec{d}(-3,-3)$. déterminer les coordonnées de A et $\vec{d}$ dans $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$.
3. Déterminer dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ une équation du cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice 3. [Bases orthonormées] Soient $\vec{u}(1/\sqrt{5},2/\sqrt{5})$ et $\vec{v}(-2/\sqrt{5},1/\sqrt{5})$.

1. Montrer que $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé de P. Est-ce un repère orthonormé direct de P ?
2. Soit M un point du plan, on note (x,y) (resp. x',y') les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (resp. $(O,\vec{u},\vec{v})$).
   (a) Exprimer x et y en fonction de x' et y'.
   (b) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

Produit scalaire et déterminant

Exercice 4. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Développer : det $(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v})$

Exercice 5. Soient A, B et C trois points du plan distincts deux à deux et non alignés.

1. Montrer que : $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\det\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\det\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$.
2. En déduire que $\frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})}=\frac{CA}{\sin(\widehat{CBA})}=\frac{AB}{\sin(\widehat{ACB})}$

Droites

Exercice 6. On considère $A(-1,-3), B(2,-2)$ et $C(0,4)$. Donner une équation de la droite d_1 passant par A et B. Donner une équation de la droite d_2 passant par C et orthogonale à d_1 ainsi qu'une équation de la droite d_3 passant par C et parallèle à d_1.

Exercice 7. Soit un triangle ABC. Deux droites Δ,Δ' parallèles à (BC) coupent (AB) et (AC) en D et E, D' et E' respectivement. Les droites (CD) et (BE) se coupent en un point M. Les droites (CD') et (BE') se coupent en un point M'. Montrer que les trois points A,M,M' sont alignés.(Indication : utiliser le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$)

Exercice 8. On considère le triangle ABC pour lequel les droites (AB), (AC) et (BC) ont pour équations respectives $2x+y=3$, $x+y=2$ et $3x+2y=4$.

1. Déterminer les coordonnées des sommets de ce triangle.
2. Déterminer une équation pour chaque médiane et vérifier que les médianes sont concourantes.
3. Calculer l'aire de ABC.

Exercice 9. Soient $A(6,4)$ et d d'équation $2x-y-3=0$. Déterminer la distance de A à d, puis les coordonnées du projeté orthogonal de A sur d.

Exercice 10. [Bissectrices de deux droites] Former les équations cartésiennes (dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé) des bissectrices des deux droites $d_1:\ 3x+4y+3=0$, $\quad d_2:\ 12x-5y+4=0$.

Exercice 11. [Droites parallèles]

1. On considère la droite d de représentation paramétrique : $\begin{cases}x=3-\lambda\\ y=-1+2\lambda\end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Déterminer une équation cartésienne de d.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite d' parallèle à d et passant par $B(1,1)$.
3. On considère la famille de droites (Δ_m) avec $\Delta_m:\ mx+(m-1)y+2=0$. Déterminer la valeur de m pour laquelle Δ_m est parallèle à d.

Cercles

Exercice 12. [Equation cartésienne, tangentes à un cercle]

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-2,-1)$ passant par $B(1,1)$.
2. On considère le cercle $\mathscr{C}$ dont une équation cartésienne est : $x^2+y^2-4x-2y+4=0$. Préciser le centre et le rayon de $\mathscr{C}$.
   Déterminer une équation cartésienne des tangentes à $\mathscr{C}$ passant par $A(0,2)$.
3. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on note $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation $(1-m^2)x+2my=4m+2$. Montrer que ces droites sont toutes tangentes à un unique cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 13. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les cercles d'équations respectives $x^2+y^2=100$ et $x^2+y^2-24x-18y+200=0$.

1. Déterminer le centre et le rayon des cercles.
2. Soit d la droite d'équation $-4x-3y+4=0$. Déterminer les points d'intersection entre d et chacun des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
3. Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont tangents et donner une équation de la tangente commune.

Exercice 14. Soit $\mathscr{C}$ le cercle d'équation cartésienne $x^2+y^2-6x+2y+5=0$ et $A(4,-4)$. On peut mener par le point A deux tangentes au cercle $\mathscr{C}$. Calculer la distance entre les points d'intersection de ces tangentes et de $\mathscr{C}$.

Exercice 15. On considère le cercle de centre O et de rayon 1 et le cercle de centre $\Omega(2,3)$ et de rayon $R>0$.

1. Déterminer une équation de chacun de ces cercles ainsi qu'une équation de leur axe radical Δ.
2. Calculer la distance de O à Δ et montrer qu'il existe deux valeurs de R pour lesquelles ces cercles sont tangents.
3. Dans chaque cas, calculer les coordonnées des points d'intersection et montrer qu'ils sont alignés avec les centres.

Exercice 16. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Former une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $M(\cos(\theta),\sin(\theta))$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 17. Pour $m \in \mathbb{R}$, on donne le cercle $\mathscr{C}_m$ d'équation :

$$x^2+y^2-4mx-2my+\frac{9m^2}{2}-m-\frac{1}{2}=0.$$

Pour $m \neq -1$, calculer le centre et le rayon de $\mathscr{C}_m$. Que peut-on dire de $\mathscr{C}_{-1}$?
Montrer que tous les cercles $\mathscr{C}_m$ ont deux tangentes communes et donner leurs équations.

Problèmes

Exercice 18. On fixe un vecteur $\vec{u}$ non nul, un point A et un réel k.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\left\langle \vec{u}, \overrightarrow{AM} \right\rangle = k$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\det\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) = k$.

Exercice 19. On considère le triangle ABC de sommets $A(1,1)$, $B(10,13)$ et $C(13,6)$.

1. Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit ainsi que son rayon.
2. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre.
3. Déterminer le lieu des points $M(x,y)$ vérifiant $d(M,(AB)) = d(M,(AC))$.

Exercice 20. Soient A et B deux points distincts et k un réel. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

$$\left\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \right\rangle = k$$

Exercice 21. Soient dans le plan deux points A et B distincts et un réel k. Etudier l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = k$.

Exercice 22. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et A et B deux points du plan. Déterminer les points M du plan tels que : $< \overrightarrow{AM}, \vec{u} > = < \overrightarrow{BM}, \vec{v} >$

Exercice 23. Soit ABC un triangle équilatéral du plan et M un point l'intérieur de celui-ci. Montrer que la somme des distances de M aux trois cotés de ABC ne dépend pas de M. (Indication : introduire un repère adapté)

Exercice 24. [Faisceaux de cercles orthogonaux] Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit a un réel tel que $|a| \geqslant 1$; on considère le cercle Γ_a de centre $A(a,0)$ de rayon $R=\sqrt{a^2-1}$.
   Ecrire l'équation cartésienne de Γ_a.
   Représenter sur une même figure les cercle $\Gamma_{3/2}$, Γ_2, Γ_3, $\Gamma_{-3/2}$, Γ_{-2} et Γ_{-3}.
2. On considère les points $C(1,0)$ et $D(-1,0)$. Montrer que pour tout point M du cercle Γ_a, le rapport MC/MD est constant.
3. Soit b un réel. On définit le cercle Γ'_b de centre $B(0,b)$ passant par C et D.
   Ecrire l'équation cartésienne de Γ'_b. Représenter sur la figure précédentes les cercles Γ'_0, Γ'_1, Γ'_2, Γ'_{-1} et Γ'_{-2}.
4. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, avec $|a| \geqslant 1$, et M_0 l'un des points d'intersection des cercles Γ_a et Γ'_b.
   Ecrire des équations cartésiennes des tangentes en M_0 à Γ_a et Γ'_b. Vérifier que ces tangentes sont orthogonales.