



Feuille d'exercices 4

Calculs algébriques

La somme \sum et le produit \prod

Exercice 1. Calculer la somme des n premiers entiers impairs.

Exercice 2. Calculer la somme $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1) \cdot n$.

Exercice 3. Calculer la somme $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)$.

Exercice 4. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

$$1. S_n = \sum_{k=1}^n (2k-1)^3 \quad 2. S_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad 3. S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

$$4. S_n = \sum_{k=1}^n 4^k + 3k + 2n \quad 5. S_n = \sum_{k=0}^n 2^k 5^{n-k} \quad 6. S = \sum_{k=9}^{29} \frac{k-2}{3}$$

$$7. S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} \quad 8. S_n = \sum_{k=1}^n k \times k!$$

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide du changement de variable $\tilde{k} = n - k$, calculer $S_n = \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Exercice 8. Pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(a) = \sum_{k=1}^n ka^k$.

- Si $a = 1$, calculer $S_n(1)$.
- Si $a \neq 1$, à l'aide du changement de variable $\tilde{k} = k - 1$, calculer $S_n(a)$.
- On suppose ici que $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. A l'aide de la fonction $x \mapsto T_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$, calculer par une nouvelle méthode $S_n(a)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercice 9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la somme $S_n = \sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

- A l'aide de l'exponentielle complexe, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 0$.
- A l'aide d'un changement de variable, retrouver le résultat de la question précédente.

Coefficient binomial et formule du binôme de Newton

Exercice 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$. A l'aide de leur somme et de leur différence, calculer A_n et B_n .

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = (1+x)^n$, ainsi que ses dérivées et/ou primitives, (re)trouver les valeurs des sommes suivantes.

$$1. S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad 2. T_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$$

$$3. U_n = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} \quad 4. U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$$

Exercice 12. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(a + kb)$.

Sommes doubles

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes doubles suivantes.

$$1. \sum_{1 \leq i, j \leq n} i \quad 2. \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i \quad 3. \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i^2$$

$$4. \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j^2 \quad 5. \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j) \quad 6. \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2$$

$$7. \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij \quad 8. \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j| \quad 9. \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$$

$$10. \sum_{0 \leq i, j \leq n} \binom{i}{j} \quad 11. \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) \quad 12. \sum_{0 \leq i, j \leq n} 2^{2i-j}$$

Exercice 14. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^j$.

- En choisissant soigneusement l'ordre de sommation, montrer que $S_n = n2^{n+1} + 1$.
- Montrer également que l'on a $S_n = \sum_{j=0}^n (j+1)2^j$.
- En déduire que $\sum_{j=1}^n j2^{j-1} = (n-1)2^n + 1$.
- Calculer alors la somme double $T_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i+1} j2^{j-1}$.