Devoir Maison 1
Logique, raisonnement et trigonométrie

A faire pour le Jeudi 26/09.

Chaque réponse doit être justifiée et le résultat $\boxed{\text{encadré}}$*. Le travail en groupe est autorisé mais la rédaction doit absolument être* ***personnelle****. N'attendez pas le dernier moment pour le travailler. N'hésitez pas à poser des questions à vos camarades ou moi-même mais uniquement* ***après*** *avoir vous-même cherché la question.*

Exercice I (Logique)

Pour tout $g \in \mathscr{F}(]1;+\infty[,\mathbb{R})$. On considère les deux prédicats suivantes :

$$\begin{array}{ll} P(g) : & \text{« la fonction } g \text{ est minorée »} \\ Q(g) : & \text{« la fonction } g \text{ admet un minimum ».} \end{array}$$

I.1 (a) Justifier en une phrase que $P(g)$ et $Q(g)$ sont des prédicats.
(b) Sans justifier, préciser quelle assertion implique l'autre.

I.2 Soit $g \in \mathscr{F}(]1;+\infty[,\mathbb{R})$.
(a) Enoncer $P(g)$ avec des quantificateurs puis sa négation.
(b) Enoncer $Q(g)$ avec des quantificateurs puis sa négation.

Soit $f : \begin{cases}]1;+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x-1}. \end{cases}$

I.3 Dresser proprement le tableau de variation de f.

I.4 $P(f)$ est-elle vraie ? Justifier.

I.5 $Q(f)$ est-elle vraie ? Justifier.

I.6 Que peut-on en déduire sur la réciproque de l'implication énoncée à la question I.1b ?

Exercice II (Raisonnement)

Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction affine et d'une fonction s'annulant en 1 et -1.

Exercice III (Trigonométrie)

III.1 (a) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
(b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation suivante d'inconnu $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos(\theta) + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin(\theta) = 2.$$

III.2 Résoudre l'inéquation suivante d'inconnu $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\pi x) > \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right).$$

III.3 Résoudre l'équation suivante d'inconnu $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x)\tan(x) + 2\cos(x) = 2.$$

III.4 (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser $16\cos(\theta)\sin^4(\theta)$.
(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation suivante d'inconnu $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta) - 3\cos(3\theta) + \cos(5\theta) = 0.$$

Exercice IV (Raisonnement par récurrence.)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est un multiple de 11.

2. *(facultatif)* On considère l'assertion P : « tout entier naturel non nul peut s'écrire sous la forme $n = 2^p(2q+1)$ où p et q sont deux entiers naturels ».

   (a) Enoncer proprement P.

   (b) Montrer par une récurrence forte que P est vraie.