Interrogation 01
Logique et raisonnement

Nom/Prénom :

Note :

1. Compléter avec les symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ ou $\times$ (lorsqu'aucun des précédents symboles ne fonctionne) les phrases suivantes. Soient $(a,b,x,y) \in \mathbb{R}^4$, $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

1.1	$a+ib=x+iy$	....	$\begin{cases} a=x \\ b=y \end{cases}$.
1.2	$f(3)=f(-3)$	....	f est paire.
1.3	f est croissante	....	$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) \geqslant f(x)$.
1.4	$\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant \varepsilon$	....	$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ f(x) \geqslant \varepsilon$.

2. Soient $(n,m,p) \in \mathbb{Z}^3$. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$(n \text{ divise } m) \ \text{ET} \ (m \text{ divise } p) \quad \Rightarrow \quad n \text{ divise } p.$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. Soient $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$\exists T > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M.$$

....

....

....

....

....

....

. . . .

. . . .

. . . .

4. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que f ne s'annule pas sur $[0;1]$ puis sa négation.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que f soit injective puis sa négation.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$.

8. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x^2 - 1} = x + 3$.

9. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x = -3 + \sqrt{x + 5}$.