Correction de l'interrogation 01
Logique et raisonnement

1. Compléter avec les symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ ou $\times$ (lorsqu'aucun des précédents symboles ne fonctionne) les phrases suivantes. Soient $(a,b,x,y)\in\mathbb{R}^4$, $f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

   1.1 $a+ib=x+iy \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=x \\ b=y \end{cases}$.

   1.2 $f(3)=f(-3) \quad \Leftarrow \quad f$ est paire.

   1.3 f est croissante $\quad \Rightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R},\ f(x+1)\geqslant f(x)$.

   1.4 $\exists \varepsilon>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\geqslant\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R},\ \exists\varepsilon>0,\ f(x)\geqslant\varepsilon$.

2. Soient $(n,m,p)\in\mathbb{Z}^3$. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$(n \text{ divise } m) \text{ ET } (m \text{ divise } p) \quad \Rightarrow \quad n \text{ divise } p.$$

   Solution. La réciproque est

$$n \text{ divise } p \quad \Rightarrow \quad (n \text{ divise } m) \text{ ET } (m \text{ divise } p).$$

   La contraposée est

$$n \text{ ne divise pas } p \quad \Rightarrow \quad (n \text{ ne divise pas } m) \text{ OU } (m \text{ ne divise pas } p).$$

   La négation est

$$(n \text{ divise } m) \text{ ET } (m \text{ divise } p) \text{ ET } (n \text{ ne divise pas } p).$$

3. Soient $f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$\exists T>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x+T)=f(x) \quad \Rightarrow \quad \exists M\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\leqslant M.$$

   Solution. La réciproque est

$$\exists M\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\leqslant M \quad \Rightarrow \quad \exists T>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x+T)=f(x).$$

   La contraposée est

$$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists x\in\mathbb{R},\ f(x)>M \quad \Rightarrow \quad \forall T>0,\ \exists x\in\mathbb{R},\ f(x+T)\neq f(x).$$

   La négation est

$$(\exists T>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x+T)=f(x)) \text{ ET } (\forall M\in\mathbb{R},\ \exists x\in\mathbb{R},\ f(x)>M).$$

4. Soit $f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que f ne s'annule pas sur $[0;1]$ puis sa négation.
   Solution. L'assertion est

$$\forall x\in[0;1],\ f(x)\neq 0.$$

   La négation est

$$\exists x\in[0;1],\ f(x)=0.$$

5. Soit $f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que f soit injective puis sa négation.
   Solution. L'assertion est

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, (f(x)=f(y) \ \Rightarrow\ x=y).$$

   La négation est donc,

$$\exists (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\neq y \text{ tel que } f(x)=f(y).$$

6. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

   Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$ l'assertion $1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

   Initialisation. Si $n=0$, alors $\frac{1-x}{1-x}=1$. Donc $P(0)$ est vraie.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons $P(n+1)$. Puisque $P(n)$ est vraie, on a $1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Donc

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}+x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.$$

   Donc $P(n+1)$ est vraie.

   Conclusion. $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ 1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}}$.

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n-1$.

   Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « $u_n = 2^n-1$ ».

   Initialisation. Si $n=0$, alors $2^0-1=1-1=0=u_0$. Donc $P(0)$ est vraie. De plus si $n=1$, alors $2^n-1=2-1=1=u_1$, donc $P(1)$ est également vraie.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $(P(n) \text{ ET } P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies et montrons $P(n+2)$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1}-2u_n && \textit{par définition de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= 3\left(2^{n+1}-1\right)-2\left(2^n-1\right) && \textit{par hypothèse de récurrence} \\ &= 3\times 2^{n+1}-3-2^{n+1}+2 \\ &= (3-1)\,2^{n+1}-1 \\ &= 2^{n+2}-1. \end{aligned}$$

   Donc $P(n+2)$ est aussi vraie.

   Conclusion, par récurrence double, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n-1}$.

8. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x^2-1}=x+3$.

   Solution. **Méthode 1 - Analyse-Synthèse.** Analyse. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{x^2-1}=x+3$. Alors

$$x^2-1=(x+3)^2=x^2+6x+9 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{5}{3}.$$

   Synthèse. Si $x=-\frac{5}{3}$, alors $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{25}{9}-\frac{9}{9}}=\frac{4}{3}$ et $x+3=-\frac{5}{3}+\frac{9}{3}=\frac{4}{3}$. Donc on a bien $\sqrt{x^2-1}=x+3$. Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{x^2-1}=x+3 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{5}{3}.}$$

   Méthode 2 - par équivalences. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-1}=x+3 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2-1 \geqslant 0 \text{ ET } x+3 \geqslant 0 \text{ ET } x^2-1=(x+3)^2=x^2+6x+9 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 \geqslant 1 \text{ ET } x \geqslant -3 \text{ ET } x=-\frac{5}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad x=-\frac{5}{3} \qquad \textit{car } \left(-\frac{5}{3}\right)^2 > 1 \text{ ET } -\frac{5}{3} \geqslant -3. \end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{x^2-1}=x+3 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{5}{3}.}$$

9. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x=-3+\sqrt{x+5}$.

   Solution. **Méthode 1 - Analyse-Synthèse.** Analyse. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x=-3+\sqrt{x+5}$. Alors

$$x+3=\sqrt{x+5} \quad \Rightarrow \quad x^2+6x+9=x+5 \quad \Rightarrow \quad x^2+5x+4=0.$$

Soit Δ le discriminant associé : $\Delta = 25 - 16 = 9$, donc les racines associées sont $\frac{-5+3}{2} = -1$ et $\frac{-5-3}{2} = -4$. Synthèse. Si $x = -1$, alors $\sqrt{x+5} = \sqrt{4} = 2 = x+3$, donc $x = -1$ est une solution. De plus si $x = -4$, alors $\sqrt{x+5} = 1 \neq -1 = x+3$, donc $x = -4$ n'est pas une solution. Conclusion,

$$\boxed{x = -3 + \sqrt{x+5} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -1.}$$

Méthode 2 - par équivalences. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} x = -3 + \sqrt{x+5} \qquad \Leftrightarrow \qquad x+3 = \sqrt{x+5} \qquad &\Leftrightarrow \qquad x^2 + 6x + 9 = x + 5 \ \text{ ET } \ x+3 \geqslant 0 \ \text{ ET } \ x+5 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad x^2 + 5x + 4 = 0 \ \text{ ET } \ x \geqslant -3. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé à $x^2 + 5x + 4 = 0$: $\Delta = 25 - 16 = 9$, donc les racines associées sont $\frac{-5+3}{2} = -1$ et $\frac{-5-3}{2} = -4$. Or $-1 \geqslant -3$ mais $-4 < -3$. Conclusion,

$$\boxed{x = -3 + \sqrt{x+5} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -1.}$$