Devoir Maison 10
Applications linéaires, dénombrement, probabilités

A faire pour le jeudi 20 avril

Problème I - Applications linéaires

On souhaite démontrer dans ce problème que si E est un espace vectoriel de dimension finie et si $f \in \mathscr{L}(E)$ alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{Ker}\left(f^k\right) \oplus \operatorname{Im}\left(f^k\right) = E$.

Partie 1 : Un exemple dans $\mathbb{R}^3$

On pose dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$ et on définit

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \to & \begin{bmatrix} 4x - y + 5z \\ -2x - y - z \\ -4x + y - 5z \end{bmatrix} \end{array}.$$

1. Démontrer que f est linéaire.
2. (a) Déterminer l'image de f. On en déterminera une base et on spécifiera sa dimension.
   (b) Vérifier que $(-1, 1, 1) \in \operatorname{Ker}(f)$.
   (c) Avec le moins de calculs possibles, déterminer le noyau de f. On en déterminera une base et on spécifiera sa dimension.
   (d) Les espaces $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
3. (a) Calculer f^2 (on explicitera pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ son image par f^2).
   (b) Déterminer l'image de f^2, en donner une base et sa dimension.
   (c) Déterminer le noyau de f^2, en donner une base et sa dimension.
   (d) Les espaces $\operatorname{Ker}\left(f^2\right)$ et $\operatorname{Im}\left(f^2\right)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Partie 2 : Généralités en dimension quelconque

On suppose dans cette partie que E est un espace vectoriel quelconque et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de f.

4. Si $f \in GL(E)$ montrer alors que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\operatorname{Ker}\left(f^k\right) \oplus \operatorname{Im}\left(f^k\right) = E$.

Dans la suite f est un endomorphisme quelconque (non nécessairement bijectif).

5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im}\left(f^{k+1}\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(f^k\right)$.
6. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker}\left(f^k\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)$.
7. Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que $\operatorname{Ker}(f^p) = \operatorname{Ker}\left(f^{p+1}\right)$.
   (a) Soit $x \in E$ tel que $f(x) \in \operatorname{Ker}\left(f^{p+1}\right)$. Montrer que $x \in \operatorname{Ker}(f^p)$.
   (b) Montrer que $\operatorname{Ker}\left(f^{p+2}\right) = \operatorname{Ker}(f^p)$.
   (c) En déduire que pour tout $k \geqslant p$, $\operatorname{Ker}\left(f^k\right) = \operatorname{Ker}(f^p)$.

Partie 3 : Résolution en dimension finie

On suppose maintenant que E est un espace vectoriel de dimension finie et on note $n = \dim(E)$ sa dimension. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \mathrm{rg}\left(f^k\right).$$

8. (a) Justifier que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée.
   (b) Montrer que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stationne à partir d'un certain rang.

On pose p le premier indice à partir duquel $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stationne. On appelle alors p **l'indice** de f.

9. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f^p)$ et $\mathrm{Im}\,(f^p)$ sont en somme directe.
10. En déduire par un argument de dimension que $\mathrm{Ker}\,(f^p) \oplus \mathrm{Im}\,(f^p) = E$.
11. (a) Soit $y \in \mathrm{Im}\,(f^p)$. A l'aide de la question précédente, montrer que $y \in \mathrm{Im}\left(f^{2p}\right)$.
    (b) En déduire que $\mathrm{Im}\,(f^p) = \mathrm{Im}\left(f^{p+1}\right)$.

Problème II - Dénombrement

Colin possède $n \in \mathbb{N}$ petites voitures de collection qu'il souhaite ranger dans son étagère qui possède $N \in \mathbb{N}^*$ compartiments. Chaque compartiment est assez grand pour accueillir toutes les petites voitures.

Partie 1 : Vroum vroum

On suppose les petites voitures et les compartiments discernables.

1. Calculer le nombre total de façons qu'a Colin de ranger ses petites voitures.
2. On suppose $N \geqslant n$. Calculer le nombre de façon qu'a Colin pour que chaque compartiment possède au plus une petite voiture.
3. Colin doit vite descendre à table et n'a pas le temps de réfléchir à un rangement très ordonné. Il range donc uniformément et indépendamment les unes des autres chaque voiture au hasard (on suppose à nouveau que chaque compartiment peut accueillir toutes les petites voitures si nécessaire).
   (a) Quelle est la probabilité que chaque compartiment possède au plus une petite voiture ?
   (b) Quelle est la probabilité que toutes les petites voitures atterrissent dans le même compartiment ?

Partie 2 : Lorsque des dinosaures se mettent au volant...

Stéphane qui n'est jamais avare de jouer un mauvais un tour à Colin, a repeint toutes ses voitures en bleu. On suppose désormais que les petites voitures sont toutes indiscernables les unes des autres (nous ne sommes pas très experts des formes de la carrosserie, oui bon c'est un modèle). Les compartiments, eux, restent discernables (nous ne sommes pas complètement bigleux quand même). On note $S(n, N)$ le nombre de façons de ranger ses n petites voitures de schtroumpfs dans ses N compartiments.

4. Préciser en justifiant $S(0, N)$, $S(1, N)$, $S(2, N)$, $S(n, 1)$ et $S(n, 2)$.
5. Soit $N \geqslant 2$. En raisonnant sur le nombre de voitures dans le compartiment N, exprimer $S(n, N)$ en fonction des $S(k, N-1)$ pour k entre 0 et n.

Les deux compères se demandent comment calculer plus rapidement $S(n, N)$. Louca passant par là (la maison de Colin est un vrai moulin) leur propose la solution suivante :

- Il aligne toutes les voitures les unes à la suite des autres sur une table.

- Louca ayant amené ses N figurines de dinosaures (toutes identiques) commence par placer un premier dinosaure au début de la file de voitures puis il place ses autres dinosaures n'importe où dans la file.
- Toutes les voitures entre le premier et le deuxième dinosaure se rangent alors dans le compartiment 1 (éventuellement il n'y a aucune voiture si vous avez mis deux dinosaures côte-à-côte). Toutes les voitures entre le deuxième et le troisième dinosaure vont dans le compartiment 2 etc.

6. Déterminer le nombre de façons d'ordonner en file les n voitures et les N dinosaures sachant que la file commence par un dinosaure et en déduire $S(n, N)$.
7. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+N-1}{k} = \binom{n+N}{n}.$$

Problème III - Probabilités

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$ deux entiers non nuls. On possède n boules numérotées de 1 à n que l'on range de façon aléatoire, équiprobable dans N cases, numérotées de 1 à N. Il est possible de ranger autant de boules que désirées dans une case et l'on suppose que le rangement d'une boule est indépendant du rangement des autres boules.

- Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on définit X_i le numéro de la case où l'on range la boule i.
- Pour tout $j \in [\![1; N]\!]$, on note Y_j le nombre de boules que contient la case j.
- On note T_n le nombre de cases possédant au moins une boule.

On suppose nos variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.

Partie 1 : Quelques lois

1. Soit $i \in [\![1; n]\!]$. Préciser la loi de X_i.
2. Soit $(i, j) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; N]\!]$. Préciser la loi de $\mathbb{1}_{(X_i=j)}$.
3. Soit $j \in [\![1; N]\!]$. Exprimer Y_j en fonction des $\mathbb{1}_{(X_i=j)}$ et en déduire la loi de Y_j.
4. Déterminer l'univers image de T_n. *On pensera à distinguer les cas $n \leqslant N$ et $n > N$.*
5. Si $n = 1$, déterminer T_1.

Partie 2 : Etude d'un cas particulier

On suppose dans cette partie que $n = 2$ et $N \geqslant 2$.

6. Exprimer $(T_2 = 1)$ à l'aide des évènements $(X_i = j)$.
7. En déduire $\mathbb{P}(T_2 = 1)$.
8. En déduire $\mathbb{P}(T_2 = 2)$.
9. Calculer pour tout $j \in [\![1; 4]\!]$, $\mathbb{P}(Y_1 = 1 \mid X_1 = j)$.
10. En déduire $\mathbb{P}(Y_1 = 1)$.
11. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid Y_1 = 1)$.
12. Déterminer la loi de Y_1.
13. Les évènements $(X_1 = 1)$ et $(Y_1 = 1)$ sont-ils indépendants ? *La réponse dépend de N.*

Partie 3 : Toutes les billes dans le même panier

On suppose dans cette partie n et N quelconques (non nuls).

14. Pour tout $j \in [\![1;N]\!]$, calculer $\mathbb{P}\left(T_n = 1 \mid X_1 = j\right)$.
15. En déduire $\mathbb{P}\left(T_n = 1\right)$. Vérifier la cohérence avec la question 3.b du problème 1.
16. Soit $j \in [\![1;N]\!]$. Les évènements $(T_n = 1)$ et $(X_1 = j)$ sont-ils indépendants ?
17. Montrer que pour tout $k \in [\![1;\min(n,N)]\!]$.

$$\mathbb{P}\left(T_{n+1} = k\right) = \frac{k}{N}\mathbb{P}\left(T_n = k\right) + \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}\left(T_n = k-1\right).$$

Partie 4 : Et la dernière formule...

On suppose dans cette partie que $n \leqslant N$ et que chaque case ne peut accueillir qu'une seule boule (autrement dit que $(T_n = n)$ est réalisé). *Attention dans ce modèle, les X_i ne sont donc plus indépendantes !*

18. Calculer $\mathbb{P}\left(\forall i \in [\![1;n]\!], X_i = i\right)$.