Correction du Devoir Maison 10 Applications linéaires, dénombrement, probabilités

Du jeudi 20 avril

Problème I - Applications linéaires

On souhaite démontrer dans ce problème que si E est un espace vectoriel de dimension infinie et si $f \in \mathscr{L}(E)$ alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{Ker}\left(f^k\right) \oplus \operatorname{Im}\left(f^k\right) = E$.

Partie 1 : Un exemple dans $\mathbb{R}^3$

On pose dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$ et on définit

$$f: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4x - y + 5z \\ -2x - y - z \\ -4x + y - 5z \end{bmatrix}.$$

1. Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} f\left(\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) &= f\left(\begin{bmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 4(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + 5(\lambda z + \mu z') \\ -2(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') \\ -4(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - 5(\lambda z + \mu z') \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} 4x - y + 5z \\ -2x - y - z \\ -4x + y - 5z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 4x' - y' + 5z' \\ -2x' - y' - z' \\ -4x' + y' - 5z' \end{bmatrix} \\ &= \lambda f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) + \mu f\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

On en déduit bien que $\boxed{f \text{ est linéaire}}$.

2. (a) On note $(e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a alors,

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}\right)$$

Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(f) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\-2\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\-1\\-5\end{bmatrix}\right) && C_1 \leftrightarrow C_2\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-6\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-6\\0\end{bmatrix}\right) && \begin{array}{l}C_2 \leftarrow C_2+4C_1\\ C_3 \leftarrow C_3+5C_1\end{array}\\
&= \underbrace{\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)}_{=\mathscr{B}_I} && \begin{array}{l}C_1 \leftarrow -C_1\\ C_2 \leftarrow \frac{-1}{6}C_2\end{array}
\end{aligned}$$

La famille $\mathscr{B}_I$ engendre $\mathrm{Im}\,(f)$. De plus les vecteurs de $\mathscr{B}_I$ ne sont pas colinéaires donc $\mathscr{B}_I$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_I = \left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathrm{Im}\,(f)}$$

et

$$\boxed{\dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right) = \mathrm{Card}\left(\mathscr{B}_{\mathrm{Im}(f)}\right) = 2.}$$

(b) On pose $u = (-1, 1, 1)$. On a

$$f(u) = \begin{bmatrix}-4-1+5\\2-1-1\\4+1-5\end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Par conséquent, on a bien $\boxed{u \in \mathrm{Ker}\,(f)}$.

(c) *« Le théorème du rang, c'est puissant » verset 1, livre 1.* On a vu à la question 1 que $\mathrm{rg}\,(f) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right) = 2$. Donc par le théorème du rang,

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) = \underset{\substack{\uparrow\\ \textit{espace de départ}}}{\dim\left(\mathbb{R}^3\right)} - \mathrm{rg}\,(f) = 3 - 2 = 1.$$

Or d'après la question précédente, $u \in \mathrm{Ker}\,(f)$ avec $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ il constitue donc une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \text{ et } \dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) = 1.}$$

(d) D'après les questions précédentes, $\mathscr{B}_I$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\mathscr{B}_K = (u)$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$. Donc

$$\mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}_{\mathrm{Im}(f)}, u\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right).$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\,(f)+\mathrm{Im}\,(f) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\right) && C_3 \leftarrow C_3 + C_1\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right) && C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Im}\,(f)
\end{aligned}$$

On constate donc que $\mathrm{Ker}\,(f)+\mathrm{Im}\,(f)=\mathrm{Im}\,(f)\neq\mathbb{R}^3$, car en particulier, $\dim(\mathrm{Im}\,(f))=2\neq\dim\left(\mathbb{R}^3\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{les espaces } \mathrm{Ker}\,(f) \text{ et } \mathrm{Im}\,(f) \text{ ne sont pas supplémentaires dans } \mathbb{R}^3.}$$

3. (a) On a pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
f^2(x,y,z) &= f\left(\begin{bmatrix}4x-y+5z\\-2x-y-z\\-4x+y-5z\end{bmatrix}\right)\\
&= \begin{bmatrix}4(4x-y+5z)-(-2x-y-z)+5(-4x+y-5z)\\-2(4x-y+5z)-(-2x-y-z)-(-4x+y-5z)\\-4(4x-y+5z)+(-2x-y-z)-5(-4x+y-5z)\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\qquad f^2(x,y,z)=\begin{bmatrix}-2x+2y-4z\\-2x+2y-4z\\2x-2y+4z\end{bmatrix}.}$$

(b) A l'aide de la question précédente, on remarque que

$$\mathrm{Im}\left(f^2\right)=\left\{(-2x+2y-4z)\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\;\middle|\;(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\;\middle|\;\lambda\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right)$$

Le vecteur $(1,1,-1)$ engendre $\mathrm{Im}\left(f^2\right)$ et est un vecteur non nul et constitue donc une famille libre et donc une base de $\mathrm{Im}\left(f^2\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{une base de } \mathrm{Im}\left(f^2\right) \text{ est } \left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right) \text{ et } \mathrm{rg}\left(f^2\right)=\dim\left(\mathrm{Im}\left(f^2\right)\right)=1.}$$

(c) On sait à l'aide de la question précédente et du théorème du rang que $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^2\right)\right)=\dim\left(\mathbb{R}^3\right)-\dim\left(\mathrm{Im}\left(f^2\right)\right)=3-1=2$. Déterminons-en une base. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in\mathrm{Ker}\left(f^2\right) \quad&\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix}-2x+2y-4z\\-2x+2y-4z\\2x-2y+4z\end{bmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}\\
&\Leftrightarrow\quad -2x+2y-4z=0\\
&\Leftrightarrow\quad x=y-2z.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\operatorname{Ker}\left(f^2\right)=\left\{\begin{bmatrix} y-2z\\ y\\ z\end{bmatrix}\ \middle|\ (y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}=\operatorname{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}\right)}_{=\mathscr{B}_{K2}}.$$

La famille $\mathscr{B}_{K2}$ engendre $\operatorname{Ker}\left(f^2\right)$. De plus $\mathscr{B}_{K2}$ est constituée de deux vecteurs non colinéaires. Donc $\mathscr{B}_{K2}$ est libre et est donc une base de $\operatorname{Ker}\left(f^2\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_{K2}=\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}\right)\text{ est une base de }\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\text{ est }\dim\left(\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\right)=2.}$$

(d) Plusieurs méthodes. On peut démontrer que les deux espaces sont supplémentaires par concaténation des bases. Montrons ici que leur intersection est réduite au vecteur nul. Soit $v\in\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\cap\operatorname{Im}\left(f^2\right)$. Puisque $v\in\operatorname{Im}\left(f^2\right)$, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $v=\lambda\,(1,1,-1)$, d'après la question 3.b. De même d'après la question 3.c, on en déduit qu'il existe $(\mu,\nu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $v=\mu\,(1,1,0)+\nu\,(-2,0,1)=(\mu-2\nu,\mu,\nu)$. On en déduit donc que

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\lambda\\ \lambda\\ -\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu-2\nu\\ \mu\\ \nu\end{bmatrix}\quad&\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\lambda=\mu-2\nu\\ \lambda=\mu\\ \lambda=-\nu\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\quad\begin{cases}-2\lambda=0\\ \mu=\lambda\\ \nu=-\lambda\end{cases}\qquad L_1\leftarrow L_1-L_2-2L_3.\end{aligned}$$

On en déduit que $\lambda=\mu=\nu=0$ et donc $v=0_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi $\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\cap\operatorname{Im}\left(f^2\right)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Or à l'aide du théorème du rang (ou des dimensions précédemment établies), on a

$$\dim\left(\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\right)+\dim\left(\operatorname{Im}\left(f^2\right)\right)=\dim\left(\mathbb{R}^3\right).$$

Donc par la caractérisation des espaces supplémentaires à l'aide de la dimension, on en déduit que

$$\boxed{\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\oplus\operatorname{Im}\left(f^2\right)=\mathbb{R}^3.}$$

Partie 2 : Généralités en dimension quelconque

On suppose dans cette partie que E est un espace vectoriel quelconque et $f\in\mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de f.

4. Soit $f\in GL(E)$ et $k\in\mathbb{N}^*$. Alors, on sait d'après le cours que $f^k\in\mathrm{GL}(E)$. Notamment f^k est injective et donc $\operatorname{Ker}\left(f^k\right)=\{0_E\}$. De plus f^k est surjective donc $\operatorname{Im}\left(f^k\right)=E$. Conclusion,

$$\boxed{E=E\oplus\{0_E\}=\operatorname{Ker}\left(f^k\right)\oplus\operatorname{Im}\left(f^k\right).}$$

Dans la suite f est un endomorphisme quelconque (non nécessairement bijectif).

5. Soit $k\in\mathbb{N}$. Montrons que $\operatorname{Im}\left(f^{k+1}\right)\subseteq\operatorname{Im}\left(f^k\right)$. Soit $y\in\operatorname{Im}\left(f^{k+1}\right)$. Par définition, il existe $x\in E$ tel que $y=f^{k+1}(x)=f^k(f(x))$. Par conséquence, y est l'image de $f(x)$ par f^k et donc $y\in\operatorname{Im}\left(f^k\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Im}\left(f^{k+1}\right)\subseteq\operatorname{Im}\left(f^k\right)}.$$

6. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $\operatorname{Ker}\left(f^k\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)$. Soit $x \in \operatorname{Ker}\left(f^k\right)$. Alors $f^k(x) = 0_E$ en donc en composant par f, $f^{k+1}(x) = f(0_E) = 0_E$ car f est linéaire. Donc $x \in \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)$. Conclusion

$$\boxed{\operatorname{Ker}\left(f^k\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)}.$$

7. Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que $\operatorname{Ker}(f^p) = \operatorname{Ker}\left(f^{p+1}\right)$.

   (a) Soit $x \in E$ tel que $f(x) \in \operatorname{Ker}\left(f^{p+1}\right)$. Par hypothèse $\operatorname{Ker}(f^p) = \operatorname{Ker}\left(f^{p+1}\right)$ donc $f(x) \in \operatorname{Ker}(f^p)$ i.e. $f^p(f(x)) = 0_E$ et donc $f^{p+1}(x) = 0_E$. Dès lors, $x \in \operatorname{Ker}\left(f^{p+1}\right) = \operatorname{Ker}(f^p)$. Ainsi, on a bien

$$\boxed{x \in \operatorname{Ker}(f^p)}.$$

   (b) D'après la question 6., pour $k = p+2$, on a $\operatorname{Ker}(f^p) = \operatorname{Ker}\left(f^{p+1}\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(f^{p+2}\right)$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \operatorname{Ker}\left(f^{p+2}\right)$ alors $f^{p+2}(x) = 0_E$ i.e. $f^{p+1}(f(x)) = 0_E$ et donc $f(x) \in \operatorname{Ker}\left(f^{p+1}\right)$. Donc d'après la question précédente, $x \in \operatorname{Ker}(f^p)$. On a donc l'inclusion réciproque $\operatorname{Ker}\left(f^{p+2}\right) \subseteq \operatorname{Ker}(f^p)$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f^p) = \operatorname{Ker}\left(f^{p+2}\right)}.$$

   (c) On pose pour tout $k \geqslant p+1$, la propriété $\mathscr{P}(k)$: « $\forall i \in [\![p+1;k]\!]$, $\operatorname{Ker}\left(f^i\right) = \operatorname{Ker}(f^p)$ ». Montrons que pour tout $k \geqslant p+1$ la propriété $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

   Initialisation. Si $k = p+1$, alors pour tout $i \in [\![p+1;k]\!] = \{p+1\}$ on a bien par hypothèse $\operatorname{Ker}\left(f^i\right) = \operatorname{Ker}(f^p)$ et donc $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.

   Hérédité. Soit $k \geqslant p+1$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie. On sait que pour tout $i \in [\![p+1;k]\!]$, on a $\operatorname{Ker}\left(f^i\right) = \operatorname{Ker}(f^p)$. Prenons $i = k-1$. Si $k-1 \geqslant p+1$, par hypothèse de récurrence, $\operatorname{Ker}\left(f^{k-1}\right) = \operatorname{Ker}(f^p)$. Si $k-1 = p$ l'égalité reste aussi vraie. Or, par l'hypothèse de récurrence, on sait aussi que $\operatorname{Ker}\left(f^k\right) = \operatorname{Ker}(f^p)$. Donc $\operatorname{Ker}\left(f^{k-1}\right) = \operatorname{Ker}\left(f^k\right)$. En utilisant la question 7.b, on en déduit que $\operatorname{Ker}\left(f^{k-1}\right) = \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)$. Et donc $\operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right) = \operatorname{Ker}(f^p)$. Rappelons que par hypothèse de récurrence nous savions que pour tout $i \in [\![p+1;k]\!]$, on a $\operatorname{Ker}\left(f^i\right) = \operatorname{Ker}(f^p)$ et donc au bilan, on a pour tout $i \in [\![p+1;k+1]\!]$, on a $\operatorname{Ker}\left(f^i\right) = \operatorname{Ker}(f^p)$ i.e. $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

   Conclusion. La propriété $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \geqslant p+1$ et donc pour tout $k \geqslant p+1$, $\operatorname{Ker}\left(f^k\right) = \operatorname{Ker}(f^p)$, ce qui reste vrai si $k = p$. Conclusion, pour tout $k \geqslant p$,

$$\boxed{\operatorname{Ker}\left(f^k\right) = \operatorname{Ker}(f^p)\,.}$$

Partie 3 : Résolution en dimension finie

On suppose maintenant que E est un espace vectoriel de dimension finie et on note $n = \dim(E)$ sa dimension. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \operatorname{rg}\left(f^k\right).$$

8. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a montré dans la question 5. que $\operatorname{Im}\left(f^{k+1}\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(f^k\right)$. On en déduit que

$$u_{k+1} = \operatorname{rg}\left(f^{k+1}\right) = \dim\left(\operatorname{Im}\left(f^{k+1}\right)\right) \leqslant \dim\left(\operatorname{Im}\left(f^k\right)\right) = u_k.$$

   On a donc montré que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. De plus par définition du rang, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ $u_k \geqslant 0$. Conclusion,

$$\boxed{(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est une suite décroissante et minorée par } 0.}$$

(b) La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Nécessairement

$$\boxed{\text{cette suite stationne à partir d'un certain rang.}}$$

Pour les sceptiques (rigoureux ? puristes ?) : procédons par l'absurde. Supposons que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne stationne pas. Cela revient à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \geqslant n$ tel que $u_m \neq u_n$ et donc par décroissance de la suite $u_m < u_n$. On peut ainsi construire une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui soit strictement décroissante. Pour $n = 1$, il existe $\varphi(1) \geqslant 2$ tel que $u_{\varphi(1)} < u_1$. Puis il existe $\varphi(2) \geqslant \varphi(1)+1$ tel que $u_{\varphi(2)} < u_{\varphi(1)}$ et ainsi de proche en proche (ou par récurrence) on construit une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante. La suite étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, on montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} < u_1 - n$ (chaque décroissance entraine un saut d'au moins 1) et donc à partir d'un certain rang, $u_{\varphi(n)} < 0$ ce qui contredit le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a fortiori est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose p le premier indice à partir duquel $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stationne. On appelle alors p **l'indice** de f.

9. Par définition de p, on a pour tout $k \geqslant p$, $u_k = u_p$. Donc par le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}(f^p)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f^p) = n - u_p = n - u_k = \dim(E) - \mathrm{rg}\left(f^k\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^k\right)\right).$$

On nous avons dans la question 6. que pour tout $k \geqslant p$, $\mathrm{Ker}(f^p) \subseteq \mathrm{Ker}\left(f^{p+1}\right) \subseteq \mathrm{Ker}\left(f^{p+2}\right) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{Ker}\left(f^k\right)$. Donc par égalité des dimensions, on en déduit que pour tout $k \geqslant p$

$$\mathrm{Ker}\left(f^k\right) = \mathrm{Ker}(f^p).$$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p)$. Alors on a d'une part $f^p(x) = 0_E$ et d'autre part il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$. Par conséquent, $f^{2p}(y) = f^p(f^p(x)) = f^p(x) = 0_E$. On en déduit que $y \in \mathrm{Ker}\left(f^{2p}\right)$. Or par ce qui précède avec $k = 2p$, on a $\mathrm{Ker}\left(f^{2p}\right) = \mathrm{Ker}(f^p)$. Donc $y \in \mathrm{Ker}(f^p)$ i.e. $f^p(y) = 0_E$. On en déduit donc que $x = f^p(y) = 0_E$. Par suite $\mathrm{Ker}(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p) = \{0_E\}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{les espaces } \mathrm{Ker}(f^p) \text{ et } \mathrm{Im}(f^p) \text{ sont en somme directe.}}$$

10. Par le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathrm{Ker}(f^p)) + \dim(\mathrm{Im}(f^p)) = \dim(E).$$

Or nous avons montré dans la question précédente que $\mathrm{Ker}(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)$. Donc par la caractérisation des espaces supplémentaires à l'aide de la dimension, on en déduit que

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f^p)) \oplus \dim(\mathrm{Im}(f^p)) = \dim(E).}$$

11. (a) Soit $y \in \mathrm{Im}(f^p)$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = f^p(x)$. D'après la question précédente, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(f^p) \times \mathrm{Im}(f^p)$ tel que $x = x_1 + x_2$. Donc par linéarité de f^p,

$$y = f^p(x) = f^p(x_1) + f^p(x_2) = 0_E + f^p(x_2) \qquad \textit{car } x_1 \in \mathit{Ker}(f^p).$$

De plus $x_2 \in \mathrm{Im}(f^p)$, donc il existe $x_3 \in E$ tel que $x_2 = f^p(x_1)$. Ainsi $y = f^p(x_2) = f^p(f^p(x_3)) = f^{2p}(x_3)$. Conclusion $\boxed{y \in \mathrm{Im}\left(f^{2p}\right)}$.

(b) Soit $y \in \mathrm{Im}(f^p)$. Alors par la question précédente, $y \in \mathrm{Im}\left(f^{2p}\right)$. Or d'après la question B.2 et une petite récurrence, on a $\mathrm{Im}\left(f^{2p}\right) \subseteq \mathrm{Im}\left(f^{2p-1}\right) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{Im}\left(f^{p+1}\right)$. On suppose $p \neq 0$ sinon cela signifie que $f = f^1 = f^0 = \mathrm{Id}_E$ et dans ce cas la conclusion est immédiate. Donc $y \in \mathrm{Im}\left(f^{p+1}\right)$. On a donc montré que

$$\mathrm{Im}(f^p) \subseteq \mathrm{Im}\left(f^{p+1}\right).$$

Réciproquement toujours par la question B.2, on a $\mathrm{Im}\left(f^{p+1}\right) \subseteq \mathrm{Im}(f^p)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Im}(f^p) = \mathrm{Im}\left(f^{p+1}\right).}$$

NB : cette égalité pouvait s'obtenir directement à l'aide de l'égalité $u_p = u_{p+1}$ et de l'inclusion obtenue en 5.

Problème II - Dénombrement

Colin possède $n \in \mathbb{N}$ petites voitures de collection qu'il souhaite ranger dans son étagère qui possède $N \in \mathbb{N}^*$ compartiments. Chaque compartiment est assez grand pour accueillir toutes les petites voitures.

Partie 1 : Vroum vroum

On suppose les voitures et les compartiments discernables.

1. Pour ranger ses voitures, Colin choisit successivement (pour chaque petite voiture) et avec remise (chaque compartiment peut toujours accueillir une nouvelle petite voiture) n compartiments parmi les N possibles. Il s'agit donc de la construction d'un n-uplet dans un ensemble de cardinal N :

$$\boxed{\text{Colin a } N^n \text{ de ranger ses petites voitures.}}$$

De quoi occuper un peu ce surexcité !

2. On suppose $N \geqslant n$. Cette fois-ci, on souhaite que chaque compartiment ne possède pas plus d'une petite voiture. Donc lorsque l'on choisit successivement chaque compartiment pour chaque petite voiture, on effectue un tirage sans remise pour ne pas mettre de petite voiture dans un compartiment déjà pris. Ainsi il s'agit d'un arrangement de n compartiments parmi les N possibles :

$$\boxed{\text{Colin a } A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!} \text{ façon de ranger ses petites voitures dans des compartiments disctincts.}}$$

3. Puisque le rangement est uniforme parmi toutes les possibilités, on peut appliquer la formule

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}.$$

(a) Notons p la probabilité qu'aucun compartiment ne possède plus d'une voiture. Par les deux questions précédentes, on a directement,

$$\boxed{p = \frac{\frac{N!}{(N-n)!}}{N^n} = \frac{N!}{(N-n)!N^n}.}$$

(b) Notons q la probabilité qu'un compartiment contienne toutes les petites voitures. On choisit le compartiment en question : N choix. Puis l'on range toutes les petites voitures dans le compartiment : 1 façon. Au total : N façons de ranger toutes les petites voitures dans le même compartiment. La probabilité associée est donc :

$$\boxed{q = \frac{N}{N^n} = \frac{1}{N^{n-1}}.}$$

Partie 2 : Lorsque des dinosaures se mettent au volant...

Cela commence à devenir franchement n'importe quoi cet exercice...
Stéphane qui n'est jamais avare de jouer un mauvais un tour à Colin, a repeint toutes ses voitures en bleu. On suppose désormais que les petites voitures sont toutes indiscernables les unes des autres (nous ne sommes pas très experts des formes de la carrosserie, oui bon c'est un modèle). Les compartiments, eux, restent discernables (nous ne sommes pas complètement bigleux quand même). On note $S(n, N)$ le nombre de façons de ranger ses n petites voitures de schtroumpfs dans ses N compartiments.

4. Une seule façon naturellement de ne ranger aucune petite voiture : $S(0, N) = 1$. Si $n = 1$, on a N choix pour l'unique petite voiture : $S(1, N) = N$. Si $n = 2$. On a deux cas distincts :

- les deux petites voitures sont dans le même compartiment. Il suffit donc de choisir l'unique compartiment qui accueille les deux voitures : N choix.
- les deux petites voitures sont dans deux compartiments distincts. Puisque les deux petites voitures sont identiques, il n'y a pas d'ordre et le tirage des deux compartiments est simultané : $\binom{N}{2}$.

En sommant les possibilités de ces deux cas disjoints, on obtient le nombre total de ranger 2 petites voitures identiques :

$$S(2,N) = N + \binom{N}{2} = N + \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2}.$$

Si $N = 1$, il n'y a qu'une façon de ranger toutes les petites voitures dans le même compartiment : $S(n,1) = 1$. Si $N = 2$. On doit ranger nos n petites voitures dans deux compartiments. On choisit le nombre p de petites voitures que l'on range dans le compartiment 1 : $n+1$ possibilités (on peut en prendre $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$, $\ldots$ ou $p = n$). Une fois que l'on a mis ces p petites voitures dans le compartiment 1, on range nécessairement les $n-p$ petites voitures restantes dans le compartiment 2 et donc une seule façon de terminer le rangement. Donc au total :

$$S(n,2) = n+1.$$

Conclusion,

$$\boxed{S(0,N) = 1, \qquad S(1,N) = N, \qquad S(2,N) = \frac{N(N+1)}{2}, \qquad S(n,1) = 1, \qquad S(n,2) = n+1.}$$

5. Soit $N \geqslant 2$. On commence par choisir/fixer le nombre $p \in [\![0;n]\!]$ de petites voitures dans le compartiment N. Une fois que l'on a fixé ce nombre, il faut ranger les $n-p$ petites voitures restantes dans les $N-1$ compartiments restants autrement dit, on a dans ce cas $S(n-p, N-1)$. Tous ces rangements étant distincts et formant l'ensemble des rangements possibles on obtient que

$$S(n,N) = \sum_{p=0}^{N} S(n-p, N-1).$$

Par l'inversion d'indice $k = n-p$, on conclut que

$$\boxed{S(n,N) = \sum_{k=0}^{n} S(k, N-1).}$$

Les deux compères se demandent comment calculer plus rapidement $S(n,N)$. Louca passant par là (la maison de Colin est un vrai moulin) leur propose la solution suivante :

- Il aligne toutes les voitures les unes à la suite des autres sur une table.
- Louca ayant amené ses N figurines de dinosaures (toutes identiques) commence par placer un premier dinosaure au début de la file de voitures puis il place ses autres dinosaures n'importe où dans la file.
- Toutes les voitures entre le premier et le deuxième dinosaure se rangent alors dans le compartiment 1 (éventuellement il n'y a aucune voiture si vous avez mis deux dinosaures côte-à-côte). Toutes les voitures entre le deuxième et le troisième dinosaure vont dans le compartiment 2 etc.

6. On aura au total une liste commençant par un dinosaure puis contenant n petites voitures et N dinosaures. On dispose donc $n+N$ cases vides puis on choisit la place des n voitures donc parmi les $n+N$ places disponibles. Le tirage étant simultané (car les petites voitures sont indiscernables) on a $\binom{n+N}{n}$ possibilités. Ensuite, on place les N dinosaures aux N places restantes. Ce procédé permettant exactement de placer les petites voitures dans l'étagère, on en déduit que

$$\boxed{S(n,N) = \binom{n+N}{n}.}$$

7. Par la question 5. on a $S(n,N) = \sum_{k=0}^{n} S(k, N-1)$. Donc par la question précédente, on conclut que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{k+N-1}{k} = \binom{n+N}{n}.}$$

Problème III - Probabilités - d'après Banque PT 2018A

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$ deux entiers non nuls. On possède n boules numérotées de 1 à n que l'on range de façon aléatoire, équiprobable dans N cases, numérotées de 1 à N. Il est possible de ranger autant de boules que désirées dans une case et l'on suppose que le rangement d'une boule est indépendant du rangement des autres boules.

- Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on définit X_i le numéro de la case où l'on range la boule i.
- Pour tout $j \in [\![1;N]\!]$, on note Y_j le nombre de boules que contient la case j.
- On note T_n le nombre de cases possédant au moins une boule.

On suppose nos variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.

Partie 1 : Quelques lois

1. Soit $i \in [\![1;n]\!]$. On range uniformément la boule i dans les N cases possibles. Donc directement,

$$\boxed{X_i \sim \mathscr{U}([\![1;N]\!]).}$$

2. Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;N]\!]$. La variable $\mathbb{1}_{(X_i=j)}$ n'a que deux issues possibles : 0 ou 1. Nécessairement, $\mathbb{1}_{(X_i=j)}$ suit une loi de Bernoulli. Cherchons son paramètre p. On a les égalités entre réels suivantes :

$$p = \mathbb{P}\left(\mathbb{1}_{(X_i=j)} = 1\right) = \mathbb{P}(X_i = j).$$

Donc par la question précédente, $p = \frac{1}{N}$. Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{1}_{(X_i=j)} \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{N}\right).}$$

3. Soit $j \in [\![1;N]\!]$. La variable Y_j compte le nombre de fois où l'on met une boule dans la case i i.e. le nombre de fois où $X_i = j$ ou encore où $\mathbb{1}_{(X_i=j)} = 1$. Donc Y_j compte le nombre de succès des variables $\mathbb{1}_{(X_i=j)}$, on observe donc que

$$\boxed{Y_j = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{(X_i=j)}.}$$

Ainsi, Y_j est une somme de n variables de Bernoulli de **même loi**, de paramètre $p = \frac{1}{N}$ et **indépendantes**. Donc Y_j est une loi binomiale :

$$\boxed{Y_j \sim \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{N}\right).}$$

4. Notons Ω

   - Si $n \leqslant N$. On possède donc plus de cases que de boules. Alors puisque l'on range n boules, il est possible qu'une seule case soit occupée (et contient alors toutes les boules) ou que deux cases soient occupées, ..., ou que n cases parmi les N soient occupées (une seule boule alors par case). Cependant, avec n boules, nous ne pouvons pas occuper plus que n cases. Dans ce cas, $T_n(\Omega) = [\![1;n]\!]$.
   - Si $n > N$. On possède donc plus de boules que de cases. Alors il est toujours possible de n'occuper qu'une seule case ou deux cases etc. Cependant ayant cette fois-ci moins de cases que de boules, il est possible de remplir les N cases et donc $T_n(\Omega) = [\![1;N]\!]$.

   Conclusion,
$$\boxed{T_n(\Omega) = [\![1;\min(n,N)]\!].}$$

5. Supposons $n = 1$. Puisque l'on range une seule boule, une seule case et une seule case exactement sera occupée. Donc l'évènement $(T_1 = 1)$ est certain autrement dit T_1 est une variable constante (oxymore) :
$$\boxed{T_1(\Omega) = \{1\} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(T_1 = 1) = 1.}$$

Partie 2 : Etude d'un cas particulier

On suppose dans cette partie que $n = 2$ et $N \geqslant 2$.

6. L'évènement $(T_2 = 1)$ correspond au fait d'avoir rangé les deux boules dans la même case : ou bien dans la case 1 ou bien dans la case 2, ..., ou bien dans la case N. Le premier cas s'écrit $(X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)$, le deuxième $(X_1 = 2) \cap (X_2 = 2)$ etc. Ainsi,
$$\boxed{(T_2 = 1) = \bigsqcup_{j \in [\![1;N]\!]} ((X_1 = j) \cap (X_2 = j)).}$$

7. Puisque l'union est disjointe,
$$\mathbb{P}(T_2 = 1) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{j \in [\![1;N]\!]} ((X_1 = j) \cap (X_2 = j))\right) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = j)$$
   Or les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes par hypothèse. Donc
$$\mathbb{P}(T_2 = 1) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X_1 = j)\,\mathbb{P}(X_2 = j).$$
   Or $X_1 \sim \mathscr{U}([\![1;N]\!])$ et $X_2 \sim \mathscr{U}([\![1;N]\!])$. D'où
$$\mathbb{P}(T_2 = 1) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} \times \frac{1}{N} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} 1 = \frac{1}{N}.$$
   Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{N}.}$$

8. Puisque $T_2(\Omega) = [\![1;2]\!]$ (car $N \geqslant 2$ et d'après la question 4.), on a $(T_2 = 2) = \overline{(T_2 = 1)}$ ou encore $(T_2 = 1)$ et $(T_2 = 2)$ forment un système complet d'évènements. Ainsi,
$$\mathbb{P}(T_2 = 2) = 1 - P(T_2 = 1) = 1 - \frac{1}{N}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{P}(T_2 = 2) = 1 - \frac{1}{N}.}$$

9. Supposons l'évènement $(X_1 = j)$ réalisé (possible car l'évènement est non négligeable) i.e. la boule 1 se trouve dans la case j.
   - Si $j = 1$, alors la boule 1 est dans la case 1. L'évènement $(Y_1 = 1)$ correspond à la case 1 ne possède qu'une seule boule et donc ne possède pas la boule 2 puisque l'on a déjà supposé la boule 1 dans la case 1. On observe donc que
   $$\mathbb{P}(Y_1 = 1 \mid X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_2 \neq 1 \mid X_1 = 1).$$
   Ainsi,
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_1 = 1 \mid X_1 = 1) &= \mathbb{P}(X_2 \neq 1 \mid X_1 = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_2 \neq 2) && \text{par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_2 = N) \\ &= 1 - \frac{1}{N} && \text{car } X_2 \sim \mathscr{U}([\![1;4]\!]).\end{aligned}$$
   - Si $j \in [\![2;N]\!]$, alors la boule 1 est supposée dans une case autre que la case 1. De la même façon, $(Y_1 = 1)$ correspond à : la case 1 possède malgré tout une boule et donc forcément la boule 2. Ainsi,
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_1 = 1 \mid X_1 = j) &= \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = j) \\ &= \mathbb{P}(X_2 = 1) && \text{par indépendance} \\ &= \frac{1}{N} && \text{car } X_2 \text{ uniforme.}\end{aligned}$$

   Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{P}(Y_1 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{N-1}{N} \qquad \text{et} \qquad \forall j \in [\![2;N]\!], \qquad \mathbb{P}(Y_1 = 1 \mid X_1 = j) = \frac{1}{N}.}$$

10. La famille $(X_1 = j)_{j \in [\![1;N]\!]}$ forme un système complet d'évènements (incompatibles). Donc par la formule des probabilités totales,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_1 = 1) &= \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(Y_1 = 1 \mid X_1 = j)\,\mathbb{P}(X_1 = j) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 1, Y_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1) + \sum_{j=2}^{N} \mathbb{P}(Y_1 = 1 \mid X_1 = j)\,\mathbb{P}(X_1 = j) && \text{car } N \geqslant 2 \\ &= \frac{N-1}{N}\mathbb{P}(X_1 = 1) + \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{N}\mathbb{P}(X_1 = 1) && \text{par la question précédente} \\ &= \frac{N-1}{N}\frac{1}{N} + \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{N}\frac{1}{N} && \text{car } X_1 \text{ est uniforme} \\ &= \frac{N-1}{N^2} + \frac{N-1}{N^2} \\ &= \frac{2(N-1)}{N^2}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{2(N-1)}{N^2}.}$$

11. L'évènement $(Y_1 = 1)$ est non négligeable. Donc par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid Y_1 = 1) = \frac{\mathbb{P}(Y_1 = 1 \mid X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1)}{\mathbb{P}(Y_1 = 1)}$$

Or par ce qui précède, $\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid Y_1 = 1) = \frac{N-1}{N}$, $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{N}$ et $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{2(N-1)}{N^2}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid Y_1 = 1) = \frac{\frac{N-1}{N}\frac{1}{N}}{\frac{2(N-1)}{N^2}} = \frac{1}{2}.$$

C'est logique, sachant que la case 1 *est occupée, il y a une chance sur deux que ce soit par la boule* 1 *!*
Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid Y_1 = 1) = \frac{1}{2}.}$$

12. Puisque $n = 2$ et $N \geqslant 2$, la case 1 peut contenir les deux boules, une seule ou aucune. Donc $Y_2(\Omega) = [\![0; 2]\!]$. Calculons $\mathbb{P}(Y_1 = 2)$. On observe que $(Y_1 = 2) = (X_1 = 1, X_2 = 1)$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_1 = 2) &= \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_2 = 1) && \text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ indépendantes} \\
&= \frac{1}{N}\frac{1}{N} && \text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ uniformes} \\
&= \frac{1}{N^2}.
\end{aligned}$$

Puis, comme $(Y_1 = i)_{i \in [\![0;2]\!]}$ forme un système complet d'évènements (incompatibles), on a

$$\mathbb{P}(Y_1 = 0) = 1 - \mathbb{P}(Y_1 = 1) - \mathbb{P}(Y_1 = 2).$$

Par ce qui précède,

$$\mathbb{P}(Y_1 = 0) = 1 - \frac{2(N-1)}{N^2} - \frac{1}{N^2} = \frac{N^2 - 2N + 2 - 1}{N^2} = \frac{(N-1)^2}{N^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{Y_1(\Omega) = [\![0; 2]\!], \qquad \mathbb{P}(Y_1 = 0) = \frac{(N-1)^2}{N^2}, \qquad \mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{2(N-1)}{N^2}, \qquad \mathbb{P}(Y_1 = 2) = \frac{1}{N^2}.}$$

On peut remarquer alors que cela correspond à

$$Y_1 \sim \mathscr{B}\left(2, \frac{1}{N}\right).$$

Naturellement !!! Nous le savions directement par la question 3.

13. On sait par ce qui précède que $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{2(N-1)}{N^2}$ et $\mathbb{P}(Y_1 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{N-1}{N}$. On a donc les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(Y_1 = 1) \text{ et } (X_1 = 1) \text{ indépendants} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(Y_1 = 1 \mid X_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = 1) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{N-1}{N} = \frac{2(N-1)}{N^2} \\
&\Leftrightarrow \quad N = 2.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{si } N = 2,\ (X_1 = 1) \text{ et } (Y_1 = 1) \text{ sont indépendants}}$$

et

$$\boxed{\text{si } N > 2\ (X_1 = 1) \text{ et } (Y_1 = 1) \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

Partie 3 : Toutes les billes dans le même panier

On suppose dans cette partie n et N quelconques (non nuls).

14. Soit $j \in [\![1;N]\!]$. Supposons $(X_1 = j)$ i.e. la boule 1 est dans la case j. Sous cette hypothèse, $(T_n = 1)$ i.e. une seule case contient des boules i.e. toutes les boules sont dans la même case. On a donc

$$\mathbb{P}\left(T_n = 1 \mid X_1 = j\right) = \mathbb{P}\left(X_2 = j, X_3 = j, \ldots, X_n = j \mid X_1 = j\right).$$

Or $(X_1 = j)$ est indépendant de $(X_2 = j, X_3 = j, \ldots, X_n = j)$. Donc

$$\mathbb{P}\left(T_n = 1 \mid X_1 = j\right) = \mathbb{P}\left(X_2 = j, X_3 = j, \ldots, X_n = j\right).$$

A nouveau les évènements $(X_2 = j)$, …, $(X_n = j)$ sont indépendants. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(T_n = 1 \mid X_1 = j\right) &= \prod_{i=2}^{n} \mathbb{P}\left(X_i = j\right)\\ &= \prod_{i=2}^{n} \frac{1}{N} &&\text{car } X_i \sim \mathscr{U}\left([\![1;N]\!]\right)\\ &= \frac{1}{N^{n-1}}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall j \in [\![1;N]\!], \qquad \mathbb{P}\left(T_n = 1 \mid X_1 = j\right) = \frac{1}{N^{n-1}}.}$$

15. La famille $(X_1 = j)_{j \in [\![1;N]\!]}$ forme un système complet d'évènements (incompatibles). Donc par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(T_n = 1\right) &= \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}\left(T_n = 1 \mid X_1 = j\right)\mathbb{P}\left(X_1 = j\right)\\ &= \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N^{n-1}}\frac{1}{N} &&\text{par la question précédente et } X_1 \sim \mathscr{U}\left([\![1;N]\!]\right)\\ &= \frac{N}{N^n}\\ &= \frac{1}{N^{n-1}}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(T_n = 1\right) = \frac{1}{N^{n-1}}.}$$

$\boxed{\text{On retrouve bien la probabilité } q\text{, résultat donné en question 3.b du problème 1.}}$

16. Par les deux questions précédentes, on observe que

$$\mathbb{P}\left(T_n = 1\right) = \frac{1}{N^{n-1}} = \mathbb{P}\left(T_n = 1 \mid X_1 = 1\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les évènements } (T_n = 1) \text{ et } (X_1 = 1) \text{ sont indépendants.}}$$

17. Soit $k \geqslant 1$. Pour réaliser $(T_{n+1} = k)$ il faut ranger $n+1$ boules dans k cases parmi les N disponibles. On sait que $T_n(\Omega) = [\![1; \min(n, N)]\!]$. Posons $m = \min(n, N)$. La famille $(T_n = i)_{i \in [\![1;m]\!]}$ forme donc un système complet d'évènements (incompatibles). Par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(T_{n+1} = k \mid T_n = i)\,\mathbb{P}(T_n = i)\,.$$

Supposons $(T_n = i)$ réalisé i.e. on a déjà rangé n boules dans i cases. Alors en rangeant la $n+1$-ième et dernière boule, on ne peut remplir que i ou $i+1$ cases (selon si la dernière boule est rangée dans une case déjà occupée ou non). Donc $k = i$ ou $k = i+1$ i.e. $i = k$ ou $i = k-1$. Dans les autres cas, $\mathbb{P}(T_{n+1} = k \mid T_n = i) = 0$. Si $k \leqslant m$,

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \mathbb{P}(T_{n+1} = k \mid T_n = k-1)\,\mathbb{P}(T_n = k-1) + \mathbb{P}(T_{n+1} = k \mid T_n = k)\,\mathbb{P}(T_n = k)\,.$$

Or si $(T_n = k-1)$ est réalisé, pour obtenir $(T_{n+1} = k)$, il faut ranger la dernière boule dans une case encore non occupée : il nous reste donc $N - (k-1)$ cases vides et donc $N - k + 1$ possibilités parmi les N cases. Ainsi,

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k \mid T_n = k-1) = \frac{N-k+1}{N}.$$

Si $(T_n = k)$ est réalisé, pour obtenir $(T_{n+1} = k)$, il faut ranger la dernière boule dans l'une des k cases déjà occupée :

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k \mid T_n = k) = \frac{k}{N}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1)\,.$$

Si $k > N+1$ alors $k-1 > N$. Donc $\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \mathbb{P}(T_n = k) = \mathbb{P}(T_n = k-1) = 0$ et la formule reste vraie.

Si $k = N+1$, alors $\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \mathbb{P}(T_n = k) = \frac{N-k+1}{N} = 0$ et la formule reste vraie.

Si $N \geqslant k > n+1$, alors $\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \mathbb{P}(T_n = k) = \mathbb{P}(T_n = k-1) = 0$ et la formule reste vraie.

Si $N \geqslant k = n+1$, $\mathbb{P}(T_n = k) = 0$ et pour ranger les $n+1$ boules dans $n+1$ cases, il faut nécessairement ranger les n premières boules dans n cases distinctes et donc

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = n+1) = \mathbb{P}(T_{n+1} = n+1, T_n = n)\,.$$

Par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = n+1) = \mathbb{P}(T_{n+1} = n+1 \mid T_n = n)\,\mathbb{P}(T_n = n)\,.$$

Sachant que l'on a rangé n boules dans n cases, pour ranger la $n+1$-ième boule dans une autre case, on a $N - n$ cases possibles parmi les N cases :

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = n+1) = \frac{N-n}{N}\mathbb{P}(T_n = n) = \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1)$$

et la formule reste toujours vraie. Conclusion,

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \qquad \mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1)\,.}$$

Partie 4 : Et la dernière formule...

On suppose dans cette partie que $n \leqslant N$ et chaque case ne peut accueillir qu'une seule boule (autrement dit que $(T_n = n)$ est réalisé). *Attention dans ce modèle, les X_i ne sont donc plus indépendantes !*

18. On cherche
$$p = \mathbb{P}\left(\forall i \in [\![1;n]\!], X_i = i\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = 1, X_2 = 2, \ldots, X_n = n\right).$$
Les variables X_i ne sont pas indépendantes. On utilise donc plutôt la formule des probabilités composées :
$$p = \mathbb{P}\left(X_n = n \mid X_1 = 1, \ldots, X_{n-1} = n-1 \right) \mathbb{P}\left(X_{n-1} = n-1 \mid X_1 = 1, \ldots, X_{n-2} = n-2 \right) \ldots \mathbb{P}\left(X_2 = 2 \mid X_1 = 1 \right) \mathbb{P}\left(X_1 = 1\right).$$
Pour placer la première boule, toutes les cases sont possibles. On a donc $X_1 \sim \mathscr{U}\left([\![1;N]\!]\right)$ et $\mathbb{P}\left(X_1 = 1\right) = \frac{1}{N}$. Sachant que l'on a placé la boule 1 dans la case 1, il reste $N-1$ cases possibles donc pour placer la boule 2 dans la case 2, on a 1 chance sur $N-1$: $\mathbb{P}\left(X_2 = 2 \mid X_1 = 1 \right) = \frac{1}{N-1}$. De même pour placer la boule $k+1$ sachant $(X_1 = 1, \ldots, X_k = k)$, on a
$$\mathbb{P}\left(X_{k+1} = k+1 \mid X_1 = 1, \ldots, X_k = k \right) = \frac{1}{N-k}.$$
D'où
$$p = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(X_{k+1} = k+1 \mid X_1 = 1, \ldots, X_k = k \right)\right) \mathbb{P}\left(X_1 = 1\right) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{N-k}\right) \frac{1}{N}.$$
Par l'inversion d'indice $i = N-k$,
$$p = \left(\prod_{k=N-k-1}^{N-1} \frac{1}{i}\right) \frac{1}{N} = \prod_{k=N-n+1}^{N} \frac{1}{i} = \frac{(N-n)!}{N!}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{P}\left(\forall i \in [\![1;n]\!], X_i = i\right) = \frac{(N-n)!}{N!}.}$$
On calcule ici la probabilité d'apparition d'UN arrangement parmi tous ceux qui sont possibles il est donc cohérent d'obtenir $\frac{1}{A_N^n}$.