Devoir Maison 11
Intégration, représentation matricielle

A faire pour le jeudi 25 mai

Problème I - Intégration

On considère la fonction f définie pour tout $x > 0$ par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Partie 1 : Une équation différentielle vérifiée par f

1. Justifier que f est définie sur $]0;+\infty[$ et déterminer son signe.
2. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u.$$
3. Justifier soigneusement que f est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$f'(x) + f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x+1} - \frac{1}{x}.$$
5. *(Question indépendante)* Résoudre l'équation différentielle
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) + y(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2+2x+5}$$

Partie 2 : Comportement en $+\infty$.

6. Montrer d'autre part que pour tout $x > 0$,
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x+1} - \frac{1}{x} + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$
7. En déduire pour tout $x > 0$ une expression de $f'(x)$ sous la forme $\int_0^1 \alpha(x,t)\,\mathrm{d}t$ où $\alpha(x,t)$ est une expression en fonction de x et de t que l'on précisera.
8. (a) Déterminer la monotonie de f.

   (b) Justifier que f possède une limite finie en $+\infty$ (on ne cherchera pas à la calculer dans cette question).
9. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$\frac{\mathrm{e}-1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{x}.$$
10. En déduire soigneusement un équivalent de f en $+\infty$.

Partie 3 : Comportement en 0^+.

On définit pour tout $x > 0$, $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

11. Justifier qu'il existe $M > 0$ (à déterminer) telle que
$$\forall t \in [0;1], \quad 0 \leqslant \mathrm{e}^t - 1 \leqslant Mt.$$

12. En déduire que g est une fonction bornée sur $]0;+\infty[$.

13. Montrer alors que pour tout $x > 0$,
$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leqslant f(x) \leqslant M + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

14. En déduire un équivalent simple de f en 0^+.

Partie 4 : Un endomorphisme

Pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on pose $\varphi(f) : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

15. Montrer proprement que φ est un endomorphisme de $\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

Pour tout fonction polynomiale f, on admet que $\varphi(f)$ est aussi une fonction polynomiale. On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$ et pour tout polynôme P, on note $\tilde{P}$ la fonction polynomiale associée. On définit alors $\varphi(P)$ comme le polynôme associé à la fonction polynomiale $\varphi(\tilde{P})$. On admet que φ définit un endomorphisme sur E.

16. Déterminer A la matrice de φ dans la base $\mathscr{C}_{can} = (1, X, X^2)$.

17. On pose $N = A - (\mathrm{e} - 1) I_3$. Vérifier que N est nilpotente d'ordre 3.

18. En déduire les puissances de A.

19. Préciser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^n(X-3)$.

Problème II - Représentation matricielle

On considère

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\to \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

On pose également

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_2[X] &\to \mathbb{R} \\ P &\mapsto P(1). \end{aligned}$$

Soit enfin $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Partie 1 : Méthode algébrique

1. Montrer que f est un endomorphisme.

2. Calculer $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)$. On pose dans la suite $A' = 8A$.

3. L'application f est-elle injective ? surjective ?

4. Déterminer la matrice de φ dans les bases canoniques.

5. Déterminer le noyau de φ.

6. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(A' - 8I_3)$ et en déduire $\mathrm{Ker}\,\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$.

7. De même déterminer $\mathrm{Ker}\,\left(f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$ et $\mathrm{Ker}\,\left(f - \frac{1}{4}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$.

On pose $\mathscr{B} = \left(1, 1-2X, 6X^2-6X+1\right)$.

8. Justifier que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

9. Calculer $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\,(f)$.

10. On pose $P = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$. Préciser P et calculer P^{-1}.

11. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

12. Soient $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $f^n\,(P)$.

13. Montrer alors que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi\left(f^n\,(P)\right) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie 2 : Méthode analytique

On pose

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

14. On admet que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que g est injectif.

    On pourra commencer par montrer que si a est une racine de $P \in Ker(g)$, alors $a + \frac{1}{2}$ aussi.

15. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. On pose $n = \deg\,(Q)$ et g_n la restriction de g à $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $Q \in \mathrm{Im}\,(g_n)$.

16. En déduire que g est un automorphisme.

17. Montrer par récurrence l'assertion suivante :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad g^n\,(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$

18. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Déterminer

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} P\left(\frac{k}{N}\right).$$

19. En déduire une expression de

$$\lim_{n\to+\infty} \psi\left(g^n\,(P)\right),$$

    où $\psi : \begin{aligned} \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R} \\ P &\mapsto P(1). \end{aligned}$