Correction du Devoir Maison 11
Intégration, représentation matricielle

Du jeudi 25 mai

Problème I - Intégration

On considère la fonction f définie pour tout $x > 0$ par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} \, dt.$$

Partie 1 : Une équation différentielle vérifiée par f

1. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{x+t}$ est définie et même continue sur $[0;1]$ car pour tout $t \in [0;1]$, $x + t \geqslant x > 0$. Donc $\int_0^1 \frac{e^t}{x+t} \, dt$ est bien définie i.e. $f(x)$ existe. On a donc précisé que pour tout $x > 0$, $f(x)$ existe et par conséquent

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien définie sur }]0;+\infty[.}$$

De plus pour tout $x > 0$ et tout $t \in [0;1]$, $x + t > 0$ et $e^t > 0$. Donc par croissance de l'intégrale, car $0 \leqslant 1$,

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} \, dt \geqslant \int_0^1 0 \, dt = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad f(x) \geqslant 0.}$$

2. Soit $x > 0$. Par le changement de variable $u = x + t$, $t = u - x$, $dt = du$, on a

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} \, dt = \int_x^{x+1} \frac{e^{u-x}}{u} \, du = e^{-x} \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u} \, du.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad f(x) = e^{-x} \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u} \, du.}$$

3. La fonction $g : u \mapsto \frac{e^u}{u}$ est définie et continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$. Par le théorème fondamental de l'analyse,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = e^{-x} \left(G(x+1) - G(x)\right).$$

G est une primitive de g et g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc par produit et différence,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]0;+\infty[.}$$

4. Avec les notations de la question précédente, on a vu que pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a

$$f(x) = e^{-x} \left(G(x+1) - G(x)\right).$$

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = -e^{-x} \left(G(x+1) - G(x)\right) + e^{-x} \left(G'(x+1) - G'(x)\right) = -f(x) + e^{-x} \left(g(x+1) - g(x)\right).$$

Donc par définition de g, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) + f(x) = e^{-x}\left(\frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{e^x}{x}\right) = \frac{e^{-x+x+1}}{x+1} - \frac{e^{-x+x}}{x}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad f'(x) + f(x) = \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x}.}$$

5. Soit

$$(E_0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) + y(x) = 0$$

l'équation différentielle homogène associée. La fonction $a : x \mapsto 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$ dont l'une est donnée par $A : x \mapsto x$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_0) est

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto C\,e^{-x} & \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto e^{-x} & \end{array} \right).$$

Procédons à la méthode de variation de la constante. Fixons

- $y_0 : x \mapsto e^{-x}$
- y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$
- $\lambda = \frac{y}{y_0}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0(x) \neq 0$.

La fonction λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas et $y = \lambda\, y_0$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (E) : & \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & y'(x) + y(x) = \frac{e^x}{x^2+2x+5} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}, & & \lambda'(x)y_0(x) + \underbrace{\lambda(x)y_0'(x) + \lambda(x)y_0(x)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_0} = \frac{e^{-x}}{x^2+2x+5} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}, & & \lambda'(x)\,e^{-x} = \frac{e^{-x}}{x^2+2x+5} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}, & & \lambda'(x) = \frac{1}{x^2+2x+5}.
\end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\frac{1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{(x+1)^2+4}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+1)^2 + 4 > 0$. Donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2+4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et l'une de ses primitives est donnée par

$$x \mapsto \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (E) \\
\Leftrightarrow \quad & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda(x) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C \\
\Leftrightarrow \quad & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = \lambda(x)y_0(x) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)e^{-x} + C\,e^{-x}.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)e^{-x} + C\,e^{-x} \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Partie 2 : Comportement en $+\infty$.

6. Soit $x>0$. On pose pour tout $t\in[0;1]$,

$$u(t)=\frac{1}{x+t}\qquad\text{et}\qquad v(t)=\mathrm{e}^t.$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et pour tout $t\in[0;1]$,

$$u'(t)=-\frac{1}{(x+t)^2}\qquad\text{et}\qquad v'(t)=\mathrm{e}^t.$$

Donc par intégration par parties,

$$f(x)=\left[\frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\right]_{t=0}^{t=1}-\int_0^1-\frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^1}{x+1}-\frac{1}{x}+\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x>0,\quad f(x)=\frac{\mathrm{e}}{x+1}-\frac{1}{x}+\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.}$$

7. Par la question 4., pour tout $x>0$,

$$f'(x)=-f(x)+\frac{\mathrm{e}}{x+1}-\frac{1}{x}.$$

En injectant la formule obtenue pour $f(x)$ dans la question précédente, on trouve

$$f'(x)=-\left[\frac{\mathrm{e}}{x+1}-\frac{1}{x}+\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right]+\frac{\mathrm{e}}{x+1}-\frac{1}{x}=\int_0^1-\frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

En posant pour tout $x>0$ et tout $t\in[0;1]$, $\alpha(x,t)=-\frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)^2}$, on conclut que

$$f'(x)=\int_0^1-\frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\alpha(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

8. (a) Soit $x>0$, pour tout $t\in[0;1]$, $\frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)^2}>0$, donc par positivité de l'intégrale

$$f'(x)=-\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t<0.$$

Ceci étant vrai pour tout $x>0$, on en déduit que

$$\boxed{f\text{ est strictement décroissante sur }]0;+\infty[.}$$

(b) Par la question précédente, f est décroissante sur $]0;+\infty[$ et d'après la question 1., la fonction f est positive donc minorée par 0 sur $]0;+\infty[$. On en déduit par le théorème de convergence monotone que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ converge en } +\infty \text{ vers un réel fixé}}$$

et sa limite est positive ou nulle.

9. Soit $x>0$, pour tout $t\in[0;1]$, on a $0<x\leqslant x+t\leqslant x+1$ (le fait que tout soit positif est important !). Donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0.+\infty[$, on a
$$\forall t\in[0;1],\quad \frac{1}{x+1}\leqslant\frac{1}{x+t}\leqslant\frac{1}{x}.$$
Or pour tout $t\in[0;1]$, $\mathrm{e}^t\geqslant 0$, donc
$$\forall t\in[0;1],\quad \frac{\mathrm{e}^t}{x+1}\leqslant\frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\leqslant\frac{\mathrm{e}^t}{x}.$$
Par croissance de l'intégrale,
$$\begin{aligned} & \int_0^1\frac{\mathrm{e}^t}{x+1}\,\mathrm{d}t\leqslant f(x)\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t}{x}\,\mathrm{d}t\\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{x+1}\left[\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^{t=1}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{x}\left[\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^{t=1}\\ \Leftrightarrow\quad & \frac{\mathrm{e}-1}{x+1}\leqslant f(x)\leqslant\frac{\mathrm{e}-1}{x}\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall x>0,\quad \frac{\mathrm{e}-1}{x+1}\leqslant f(x)\leqslant\frac{\mathrm{e}-1}{x}.}$$

10. Puisque
$$\frac{\mathrm{e}-1}{x+1}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\mathrm{e}-1}{x},$$
par la question précédente et le théorème d'encadrement des équivalents,
$$\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\mathrm{e}-1}{x}.}$$

Partie 3 : Comportement en 0^+.

On définit pour tout $x>0$, $g(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t-1}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

11. La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;1]$. Par conséquent, pour tout $t\in[0;1]$, $0\leqslant\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^0=\mathrm{e}^t-1$. De plus la fonction exponentielle est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) donc, par le théorème des accroissements finis, pour tout $t\in[0;1]$,
$$0\leqslant\mathrm{e}^t-1=\left|\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^0\right|\leqslant\sup_{s\in[0;t]}|\mathrm{e}^s|\,|t-0|\leqslant\sup_{s\in[0;1]}|\mathrm{e}^s|\,t=\mathrm{e}\,t.$$
En posant $M=\mathrm{e}>0$, on conclut que
$$\boxed{\forall t\in[0;1],\quad 0\leqslant\mathrm{e}^t-1\leqslant\mathrm{e}\,t.}$$

12. Soit $x>0$. Par la question précédente et la croissance de l'intégrale,
$$0\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t-1}{t+x}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{e}\,t}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$
De plus, pour tout $t\in[0;1]$, $t+x\geqslant t\ \Leftrightarrow\ \frac{t}{x+t}\leqslant 1$ donc pour tout $t\in[0;1]$, $\frac{\mathrm{e}\,t}{t+x}\leqslant\mathrm{e}$. Ainsi, toujours par croissance de l'intégrale,
$$0\leqslant g(x)\leqslant\int_0^1\mathrm{e}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}\,.$$
Ceci étant vrai pour tout $x>0$, on en déduit que
$$\boxed{g\text{ est une fonction bornée sur }]0;+\infty[.}$$

13. Soit $x > 0$. Par définition de f et de g, on a

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t - 1}{x+t}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t = g(x) + \int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Donc par la question précédente, en rappelant que $M = \mathrm{e}$, on a

$$\int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e} + \int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t &= [\ln(x+t)]_{t=0}^{t=1} \qquad \textit{car } x+t>0\\ &= \ln(x+1) - \ln(x)\\ &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).\end{aligned}$$

D'où,

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).}$$

14. On observe que

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(1+x) - \ln(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\sim} -\ln(x).$$

Notamment $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $e \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\ll} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$. Ainsi,

$$\mathrm{e} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\sim} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\sim} -\ln(x).$$

Donc par la question précédente et par le théorème d'encadrement pour les équivalents, on conclut que

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\sim} -\ln(x).}$$

Partie 4 : Un endomorphisme

Pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on pose $\varphi(f) : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

15. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[x; x+1]$ donc $t \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^t$ est aussi continue sur $[x; x+1]$ et donc $\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ existe. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\varphi(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^t$ étant continue sur $\mathbb{R}$ elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive de $t \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^t$ sur $\mathbb{R}$. Par le théorème fondamental de l'analyse,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(f)(x) = \mathrm{e}^{-x}(F(x+1) - F(x)).$$

Puisque $t \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^t$ est continue sur $\mathbb{R}$, F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc par produit et différence, $\varphi(f)$ est $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ donc notamment continue sur $\mathbb{R}$. Donc pour tout $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$, $\varphi(f) \in \mathscr{C}(f)$. Donc φ va bien de $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

Montrons maintenant que φ est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$. Posons $h = \lambda f + \mu g$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(h)(x) &= \mathrm{e}^{-x} \int_x^{x+1} h(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-x} \int_x^{x+1} (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-x} \left(\lambda \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + \mu \int_x^{x+1} g(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right) && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \lambda\,\mathrm{e}^{-x} \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + \mu\,\mathrm{e}^{-x} \int_x^{x+1} g(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda\,\varphi(f)(x) + \mu\,\varphi(g)(x).
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g)$ et donc φ est linéaire. Conclusion,

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{C}(\mathbb{R})),\ \varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{C}(\mathbb{R}).}$$

Pour tout fonction polynomiale f, on admet que $\varphi(f)$ est aussi une fonction polynomiale. On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$ et pour tout polynôme P, on note $\tilde{P}$ la fonction polynomiale associée. On définit alors $\varphi(P)$ comme le polynôme associé à la fonction polynomiale $\varphi(\tilde{P})$. On admet que φ définit un endomorphisme sur E.

16. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\tilde{1})(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_x^{x+1} 1 \times \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x} \left[\mathrm{e}^t\right]_{t=x}^{t=x+1} = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e}^x\right) = \mathrm{e} - 1.$$

Donc

$$\varphi(1) = \mathrm{e} - 1.$$

De même,

$$\varphi(\tilde{X})(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_x^{x+1} t \times \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \mathrm{e}^t$ et $v(t) = t$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[x; x+1]$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = \mathrm{e}^t$ et $v'(t) = 1$. Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\varphi(\tilde{X})(x) &= \mathrm{e}^{-x} \left(\left[t\,\mathrm{e}^t\right]_{t=x}^{t=x+1} - \int_x^{x+1} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \mathrm{e}^{-x}\left((x+1)\,\mathrm{e}^{x+1} - x\,\mathrm{e}^x\right) - \varphi(\tilde{1})(x) \\
&= (x+1)\,\mathrm{e} - x - (\mathrm{e} - 1) \\
&= (\mathrm{e} - 1)\,x + 1.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\varphi(X) = (\mathrm{e} - 1)\,X + 1.$$

Enfin,

$$\varphi\left(\tilde{X^2}\right)(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_x^{x+1} t^2 \times \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \mathrm{e}^t$ et $v(t) = t^2$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{N}$, $u'(t) = \mathrm{e}^t$ et $v'(t) = 2t$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\tilde{X^2}\right)(x) &= \mathrm{e}^{-x} \left(\left[t^2\,\mathrm{e}^t\right]_{t=x}^{t=x+1} - \int_x^{x+1} 2t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \mathrm{e}^{-x}\left((x+1)^2\,\mathrm{e}^{x+1} - x^2\,\mathrm{e}^x\right) - 2\,\varphi(\tilde{X})(x) \\
&= \mathrm{e}\left(x^2 + 2x + 1\right) - x^2 - 2\,(\mathrm{e} - 1)\,x - 2 \\
&= (\mathrm{e} - 1)\,x^2 + 2x + \mathrm{e} - 2.
\end{aligned}$$

D'où,
$$\varphi\left(X^2\right) = (\mathrm{e}-1)\, X^2 + 2X + \mathrm{e}-2.$$

Par ces calculs, on conclue que

$$\boxed{A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}_{can}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}-1 & 1 & \mathrm{e}-2 \\ 0 & \mathrm{e}-1 & 2 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}-1 \end{pmatrix}.}$$

17. On pose $N = A - (\mathrm{e}-1)\, I_3$. On a
$$N = \begin{pmatrix} \mathrm{e}-1 & 1 & \mathrm{e}-2 \\ 0 & \mathrm{e}-1 & 2 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}-1 \end{pmatrix} - (\mathrm{e}-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}-1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathrm{e}-2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite,
$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathrm{e}-2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathrm{e}-2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puis,
$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathrm{e}-2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3.$$

Conclusion,
$$\boxed{N \text{ est nilpotente d'ordre } 3.}$$

18. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $A = (\mathrm{e}-1)\, I_3 + N$. Or N et I_3 commutent, donc par la formule du binôme de Newton,
$$A^n = ((\mathrm{e}-1)\, I_3 + N) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k\, (\mathrm{e}-1)^{n-k}\, I_3^{n-k}$$

Puisque pour tout $k \geqslant 3$, $N^k = O_3$, si $n \geqslant 2$, on a
$$\begin{aligned} A^n &= \binom{n}{0}(\mathrm{e}-1)^n\, I_3 + \binom{n}{1}(\mathrm{e}-1)^{n-1}\, N + \binom{n}{2}(\mathrm{e}-1)^{n-2}\, N^2 + O_3 \\ &= (\mathrm{e}-1)^n\, I_3 + \begin{pmatrix} 0 & n\,(\mathrm{e}-1)^{n-1} & n\,(\mathrm{e}-2)\,(\mathrm{e}-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & 2n\,(\mathrm{e}-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\frac{n(n-1)}{2}\,(\mathrm{e}-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\mathrm{e}-1)^n & n\,(\mathrm{e}-1)^{n-1} & n\left(\mathrm{e}^2-3\,\mathrm{e}+n+1\right)(\mathrm{e}-1)^{n-2} \\ 0 & (\mathrm{e}-1)^n & 2n\,(\mathrm{e}-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (\mathrm{e}-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si $n = 1$, on a
$$\begin{pmatrix} (\mathrm{e}-1)^n & n\,(\mathrm{e}-1)^{n-1} & n\left(\mathrm{e}^2-3\,\mathrm{e}+n+1\right)(\mathrm{e}-1)^{n-2} \\ 0 & (\mathrm{e}-1)^n & n\,(\mathrm{e}-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (\mathrm{e}-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}-1 & 1 & \frac{\mathrm{e}^2-3\,\mathrm{e}+2}{\mathrm{e}-1} \\ 0 & \mathrm{e}-1 & 2 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}-1 \end{pmatrix} = A.$$

Donc la formule reste vraie pour $n = 1$ et de même si $n = 0$, on obtient bien I_3. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} (\mathrm{e}-1)^n & n\,(\mathrm{e}-1)^{n-1} & n\left(\mathrm{e}^2-3\,\mathrm{e}+n+1\right)(\mathrm{e}-1)^{n-2} \\ 0 & (\mathrm{e}-1)^n & 2n\,(\mathrm{e}-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (\mathrm{e}-1)^n \end{pmatrix}.}$$

19. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $V_n = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_{can}}(\varphi^n(X-3))$ et $U = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_{can}}(X-3)$. Dès lors,

$$V_n = A^n U.$$

Or $U = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned} V_n &= \begin{pmatrix} (\mathrm{e}-1)^n & n(\mathrm{e}-1)^{n-1} & n\left(\mathrm{e}^2-3\,\mathrm{e}+n+1\right)(\mathrm{e}-1)^{n-2} \\ 0 & (\mathrm{e}-1)^n & 2n(\mathrm{e}-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (\mathrm{e}-1)^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n(\mathrm{e}-1)^{n-1} - (\mathrm{e}-1)^n \\ (\mathrm{e}-1)^n \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (n-\mathrm{e}+1)(\mathrm{e}-1)^{n-1} \\ (\mathrm{e}-1)^n \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \varphi^n(X-3) = (\mathrm{e}-1)^n X + (n-\mathrm{e}+1)(\mathrm{e}-1)^{n-1} = (\mathrm{e}-1)^n \left(X + \frac{n-\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}\right).}$$

Problème II - Représentation matricielle

On considère

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\to \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

On pose également

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_2[X] &\to \mathbb{R} \\ P &\mapsto P(1). \end{aligned}$$

Soit enfin $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Partie 1 : Méthode algébrique

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P)$ existe bien, il nous faut donc montrer que $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. L'élément $f(P)$ est un polynôme. De plus,

$$\begin{aligned} \deg(f(P)) &= \deg\left(\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]\right) \\ &\leqslant \max\left(\deg\left(P\left(\frac{X}{2}\right)\right), \deg\left(P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)\right) \\ &= \max(\deg(P), \deg(P)) \\ &= \deg(P) \leqslant 2. \end{aligned}$$

Donc $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ et

$$\boxed{f \text{ est bien définie.}}$$

Montrons que f est linéaire. Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $(P,Q)\in\mathbb{R}_2[X]$. Posons $R=\lambda P+\mu Q$. On a

$$\begin{aligned} f(R) = \frac{1}{2}\left[R\left(\frac{X}{2}\right)+R\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] &= \frac{1}{2}\left[(\lambda P+\mu Q)\left(\frac{X}{2}\right)+(\lambda P+\mu Q)\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\lambda P\left(\frac{X}{2}\right)+\mu Q\left(\frac{X}{2}\right)+\lambda P\left(\frac{X+1}{2}\right)+\mu Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]\\ &= \lambda\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right)+P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]+\mu\frac{1}{2}\left[Q\left(\frac{X}{2}\right)+Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]\\ &= \lambda f(P)+\mu f(Q). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est linéaire.}}$$

2. Calculons les images de $\mathscr{C}=\left(1,X,X^2\right)$ par f.

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{2}[1+1]=1\\ f(X) &= \frac{1}{2}\left[\frac{X}{2}+\frac{X+1}{2}\right]=\frac{2X+1}{4}=\frac{X}{2}+\frac{1}{4}\\ f\left(X^2\right) &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{X}{2}\right)^2+\left(\frac{X+1}{2}\right)^2\right]=\frac{X^2+X^2+2X+1}{8}=\frac{X^2}{4}+\frac{X}{4}+\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{A=\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}.}$$

En particulier, $A'=8A=\begin{pmatrix}8&2&1\\0&4&2\\0&0&2\end{pmatrix}$.

3. Puisque A est échelonnée avec un pivot sur chaque ligne, on en déduit que $\mathrm{rg}(A)=3$. Donc A est inversible. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$$

4. Calculons les images de $\mathscr{C}=\left(1,X,X^2\right)$ par φ. On a

$$\varphi(1)=1,\qquad \varphi(X)=1,\qquad \varphi\left(X^2\right)=1.$$

En notant $\mathscr{C}'=(1)$ la base canonique de $\mathbb{R}$, on conclut que

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}(\varphi)=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}.}$$

5. Soit $P=a+bX+cX^2\in\mathbb{R}_2[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$P\in\mathrm{Ker}(\varphi)\quad\Leftrightarrow\quad\varphi(P)=0_{\mathbb{R}}\quad\Leftrightarrow\quad a+b+c=0\quad\Leftrightarrow\quad a=-b-c.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi)=\mathrm{Vect}\left(X^2-1,X-1\right).}$$

6. Soit $B = A' - 8I_3$. On a alors

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(B) \quad & \Leftrightarrow \quad B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2y + z = 0 \\ -4y + 2z = 0 \\ -6z = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad y = z = 0. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(A' - 8I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right).}$$

Or $A' - 8I_3$ est la matrice canoniquement associée à $8f - 8\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$. Donc,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right) = \mathrm{Ker}\,\left(8\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)\right) = \mathrm{Ker}\,\left(8f - 8\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right) = \mathrm{Vect}\,\left(1_{\mathbb{R}_2[X]}\right).}$$

7. De même,

$$A' - 4I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Donc pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}\left(A - \frac{1}{2}I_3\right) \quad & \Leftrightarrow \quad \left(A - \frac{1}{2}I_3\right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \Leftrightarrow \quad (A' - 4I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x + 2y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -2x \\ z = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{Ker}\left(A - \frac{1}{2}I_3\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

D'où, $\mathrm{Ker}\,\left(f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right) = \mathrm{Vect}\,(1 - 2X)$. Enfin,

$$A' - 2I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\operatorname{Ker}\left(A-\frac{1}{4}I_3\right) &\Leftrightarrow \left(A-\frac{1}{4}I_3\right)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}\\ &\Leftrightarrow (A'-2I_3)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}6x+2y+z=0\\2y+2z=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{6}(-2y-z)=\frac{z}{6}\\y=-z.\end{cases}\end{aligned}$$

Donc

$$\operatorname{Ker}\left(A-\frac{1}{4}I_3\right)=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-6\\6\end{bmatrix}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}\left(f-\frac{1}{2}\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)=\operatorname{Vect}(1-2X)\qquad\text{et}\qquad\operatorname{Ker}\left(f-\frac{1}{4}\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)=\operatorname{Vect}\left(1-6X+6X^2\right).}$$

On pose $\mathscr{B}=\left(1,1-2X,6X^2-6X+1\right)$.

8. $\mathscr{B}$ est une famille de polynômes échelonnée en ses degrés. Donc $\mathscr{B}$ est libre. De plus $\operatorname{Card}(\mathscr{B})=\dim(\mathbb{R}_2[X])$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}\text{ est une base de }\mathbb{R}_2[X].}$$

9. Posons $e_1=1$, $e_2=1-2X$ et $e_3=6X^2-6X+1$. Par ce qui précède, on a $e_1\in\operatorname{Ker}\left(f-\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$ donc $f(e_1)-e_1=0_{\mathbb{R}_2[X]}$ et ainsi $f(e_1)=e_1$. De même $e_2\in\operatorname{Ker}\left(f-\frac{1}{2}\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$ et $e_3\in\operatorname{Ker}\left(f-\frac{1}{4}\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$. Ainsi, on a

$$f(e_1)=e_1,\qquad f(e_2)=\frac{1}{2}e_2,\qquad f(e_3)=\frac{1}{4}e_3.$$

Conclusion,

$$\boxed{D=\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}.}$$

10. On pose $P=P_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$. On a

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&-6\\0&0&6\end{pmatrix}.}$$

De plus, par opérations élémentaires sur les lignes,

$$\begin{array}{lll}P\underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{array}{l}L_2\leftarrow -\frac{1}{2}L_2\\L_3\leftarrow\frac{1}{6}L_3\end{array} & I_2\underset{\mathscr{L}}{\sim}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ \underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{array}{l}L_2\leftarrow L_2-3L_3\\L_1\leftarrow L_1-L_3\end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&0&-1\\0&-3&-3\\0&0&1\end{pmatrix}\\ \underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & L_1\leftarrow L_1-L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&3&2\\0&-3&-3\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{array}$$

Conclusion,

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

On a bien pensé à vérifier que $PP^{-1} = I_3$.

11. Par la formule de changement de base, on a

$$A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f) = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)\, P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = PDP^{-1}.$$

Donc par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PDP^{-1}PDP^{-1}\dots PDP^{-1} = PDD\dots DP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

La matrice D étant diagonale, on en déduit ainsi que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{6}P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2^n} & -\frac{3}{2^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3\left(1-\frac{1}{2^n}\right) & 2-\frac{3}{2^n}+\frac{1}{4^n} \\ 0 & \frac{6}{2^n} & \frac{6}{2^n}-\frac{6}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{6}{4^n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{6\times 4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{6\times 4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}.}$$

12. Soient $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f^n(P)) = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f^n)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(P) &= A^n\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{6\times 4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a + b\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\right) + c\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{6\times 4^n}\right) \\ \frac{b}{2^n} + c\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}\right) \\ \frac{c}{4^n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f^n(P) = a + b\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\right) + c\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{6\times 4^n}\right) + \left[\frac{b}{2^n} + c\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}\right)\right]X + \frac{c}{4^n}X^2.}$$

13. Par la question précédente, pour tout $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi\left(f^n(P)\right) = a + b\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + c\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6 \times 4^n}\right) + \frac{b}{2^n} + c\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right) + \frac{c}{4^n}.$$

Donc par passage à la limite,

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi\left(f^n(P)\right) = a + b\left(\frac{1}{2} - 0\right) + c\left(\frac{1}{3} - 0 + 0\right) + 0 + c\,(0 - 0) + 0 = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}.$$

D'autre part,

$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(a + bt + ct^2\right)\mathrm{d}t = \left[at + b\frac{t^2}{2} + c\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=1} = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \qquad \lim_{n \to +\infty} \varphi\left(f^n(P)\right) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Partie 2 : Méthode analytique

On pose

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

14. On admet que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Soit $P \in \operatorname{Ker}(g)$.

Premier cas, $P = c \in \mathbb{R}$ est constant. Alors,

$$0 = g(P) = \frac{1}{2}(c + c) = c.$$

Donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Second cas, $\deg(P) \geqslant 1$. Alors d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) = 0_{\mathbb{C}}$. Alors,

$$0_{\mathbb{C}} = g(P)(2a) = \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{2a}{2}\right) + P\left(\frac{2a+1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[P(a) + P\left(a + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}P\left(a + \frac{1}{2}\right).$$

Donc $P\left(a + \frac{1}{2}\right) = 0_{\mathbb{C}}$ i.e. $a + \frac{1}{2}$ est une racine de P. Donc par récurrence, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P\left(a + \frac{n}{2}\right) = 0_{\mathbb{C}}.$$

Donc P admet une infinité de racine. Donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$, ce qui contredit l'hypothèse $\deg(P) \geqslant 1$.

Ainsi, $\operatorname{Ker}(g) \subseteq \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$. Or l'inclusion réciproque étant aussi vérifiée, on en déduit que

$$\operatorname{Ker}(g) = \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}.$$

Conclusion,

$$\boxed{g \text{ est injectif.}}$$

15. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. On pose $n = \deg(Q)$ et g_n la restriction de g à $\mathbb{R}_n[X]$. Autrement dit

$$\begin{aligned} g_n : \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

La restriction d'une application linéaire à un sous-espace vectoriel reste une application linéaire. Donc $g_n \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}[X])$. De plus, si $P \in \mathrm{Ker}(g_n)$, alors $g(P) = g_n(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc $P \in \mathrm{Ker}(g)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(g_n) \subseteq \mathrm{Ker}(g) = \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$. Donc $\mathrm{Ker}(g_n) = \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$ i.e. $\dim(\mathrm{Ker}(g_n)) = 0$. Par le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Im}(g_n)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(g_n)) = n + 1 - 0 = n + 1.$$

D'autre part, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors

$$\deg(g_n(P)) \leqslant \max\left(\deg\left(P\left(\frac{X}{2}\right)\right), \deg\left(P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)\right) \leqslant n.$$

Donc $\mathrm{Im}(g_n) \subseteq \mathbb{R}_n[X]$. Or nous avions $\dim(\mathrm{Im}(g_n)) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Donc

$$\mathrm{Im}(g_n) = \mathbb{R}_n[X].$$

Or $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Conclusion,

$$\boxed{Q \in \mathrm{Im}(g_n)}.$$

16. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Notons $n = \deg(Q)$. Alors d'après la question précédente, $Q \in \mathrm{Im}(g_n)$. Par conséquent, il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = g_n(P) = g(P)$. Donc $Q \in \mathrm{Im}(g)$. Ainsi, $\mathbb{R}[X] \subseteq \mathrm{Im}(g)$. La réciproque étant aussi vraie, on en déduit que

$$\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}[X].$$

Autrement dit g est surjectif. Or par la question 14., on sait que g est aussi injectif. Donc g est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}[X]$. Conclusion,

$$\boxed{g \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}[X]) \text{ i.e. est un automorphisme de } \mathbb{R}[X].}$$

17. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(n) \ : \quad \text{« } g^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right). \text{ »}$$

Initialisation. Si $n = 0$, on a $g^0(P) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}(P) = P$. D'autre part,

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^{0} P(X+k) = P(X) = P.$$

Donc $g^0(P) = P$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. On a

$$g^{n+1}(P) = g(g^n(P)).$$

Donc par hypothèse de récurrence,

$$g^{n+1}(P) = g\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} g\left(P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) \qquad \textit{car } g \textit{ est linéaire.}$$

Pour tout $k \in [\![0; 2^n - 1]\!]$, posons $Q_k = P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$. Par définition de g,

$$\begin{aligned} g\left(P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) = g\left(Q_k\right) &= \frac{1}{2}\left[Q_k\left(\frac{X}{2}\right) + Q_k\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{\frac{X}{2}+k}{2^n}\right) + P\left(\frac{\frac{X+1}{2}+k}{2^n}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right) + P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} g^{n+1}(P) &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right) + P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\Bigg(\underbrace{\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right)}_{\textit{somme des termes pairs entre } 1 \textit{ et } 2^n} + \underbrace{\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right)}_{\textit{somme des termes impairs entre } 1 \textit{ et } 2^n}\Bigg) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad g^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).}$$

18. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Posons $\tilde{P}$ la fonction polynomiale associée. Alors $\tilde{P} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et donc $\tilde{P}$ est notamment continue. En posant $a = 0$ et $b = 1$, on reconnait une somme de Riemann :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} P\left(\frac{k}{N}\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\tilde{P}\left(a + k\frac{b-a}{N}\right).$$

Ainsi, la suite converge et

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} P\left(\frac{k}{N}\right) = \int_a^b \tilde{P}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} P\left(\frac{k}{N}\right) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.}$$

19. Soit $\psi : \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(1). \end{array}$ La fonction ψ est linéaire (facile). Donc par la question 17., pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi\left(g^n(P)\right) = \psi\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\psi\left(P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{1+k}{2^n}\right).$$

Par le glissement d'indice $\tilde{k} = k+1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi\left(g^n(P)\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} P\left(\frac{k}{2^n}\right).$$

Posons pour tout $N \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} P\left(\frac{k}{N}\right)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi\left(g^n\left(P\right)\right) = u_{\Phi(n)}.$$

La fonction $\Phi : n \mapsto 2^n$ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Donc la suite $\left(u_{\Phi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$. Dès lors,

$$\lim_{n \to +\infty} \psi\left(g^n\left(P\right)\right) = \lim_{n \to +\infty} u_{\Phi(n)} = \lim_{N \to +\infty} u_N.$$

Or par la question précédente, $\lim\limits_{N \to +\infty} u_N = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \psi\left(g^n\left(P\right)\right) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.}$$