# Devoir Maison 12
# Variables aléatoires et géométrie

*A faire pour le jeudi 15 juin*

## Problème I - Variables aléatoires

Un secrétaire doit joindre $N$ personnes.

- Le premier jour il appelle ces $N$ personnes, chacune ayant une probabilité $p \in ]0;1[$ de répondre (et cette probabilité est indépendante des autres appels). On note alors $X_1$ le nombre de personnes qui ont répondu.

- Le deuxième jour, le secrétaire rappelle tous ceux qui n'ont pas répondu à son premier appel (mais ne rappelle pas ceux qui ont déjà répondu à son appel le premier jour). On suppose que chaque personne appelée présente toujours une probabilité $p$ de répondre. On note alors $X_2$ le nombre de personnes qui ont répondu durant cette deuxième journée.

- Le secrétaire est tenace et rappelle le troisième jour tous ceux qui n'ont pas répondu les deux jours précédents et ainsi de suite...

  $\vdots$

- Il rappelle donc le jour $n$ tous ceux qui n'ont pas répondu les $n-1$ jours précédents. Chacune de ces personnes a toujours une probabilité $p$ de répondre à cet $n$-ième appel. On note alors $X_n$ le nombre de personnes ayant répondu durant le jour $n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note également $Z_n$ le nombre TOTAL de personnes qui ont répondu durant les $n$ premiers jours.

### Partie 1 : Préliminaire

1. (a) Quelle est la loi de $X_1$ ? Justifier.
   (b) En déduire son univers image, son espérance, sa variance et sa fonction génératrice.

2. Soit $i \in [\![0;N]\!]$.
   (a) Quelle est l'univers image de $X_2$ sachant $X_1 = i$ ?
   (b) Déterminer la loi conditionnelle de $X_2$ sachant $X_1 = i$ et préciser $\mathbb{P}(X_2 = j \mid X_1 = i)$, pour $j \in [\![0;N]\!]$.
   (c) En déduire la loi conjointe de $X_1$ et $X_2$.

### Partie 2 : Cas $N = 2$

On suppose dans cette partie que $N = 2$ et que $p = \frac{1}{2}$.

3. Préciser $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)$ et donner la loi conjointe de $X_1$ et $X_2$ dans un tableau.

4. Déterminer, en justifiant les calculs avec soin, la loi de $X_2$.

5. Les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ sont-elles indépendantes ?

6. Calculer l'espérance, la variance et la fonction génératrice de $X_2$.

## Partie 3 : Loi de $Z_2$

On revient au cas général, où $N$ est un entier naturel non nul quelconque et $p$ un réel entre $]0;1[$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Exprimer $Z_n$ en fonction de $X_1, \dots, X_n$.
   (b) Préciser l'univers image de $Z_n$.
   (c) Pourquoi ne peut-on pas directement conclure que $Z_n$ suit une loi binomiale ?

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(Z_n = 0)$.
   (b) Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$ ?

9. Montrer à l'aide de la question 2 que pour tout $(i,j) \in [\![0;N]\!]^2$,

$$\mathbb{P}(Z_2 = j \mid Z_1 = i) = \begin{cases} \binom{N-i}{j-i} p^{j-i} (1-p)^{N-j} & \text{si } j \geqslant i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

10. Soit $j \in [\![0;N]\!]$. En déduire que

$$\mathbb{P}(Z_2 = j) = p^j (1-p)^{2N-2j} \sum_{i=0}^{j} \binom{N-i}{j-i} \binom{N}{i} (1-p)^{j-i}.$$

11. Simplifier

$$\frac{\binom{N-i}{j-i}\binom{N}{i}}{\binom{j}{i}}.$$

12. On pose $p_2 = p(2-p)$. Conclure que $Z_2 \sim \mathscr{B}(N, p_2)$.

## Partie 4 : Convergence de $Z_n$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Z_n) = Np_n$ et $\mathbb{V}(Z_n) = Np_n(1-p_n)$, où $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels définie par récurrence par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = (1-p)\,p_n + p \qquad \text{et} \qquad p_1 = p.$$

13. Déterminer une expression de $p_n$ en fonction de $p$ et de $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\varepsilon \in \left]0; \frac{1}{4N}\right[$.

14. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $1 - \varepsilon \leqslant p_n \leqslant 1$.

15. Montrer que pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|Z_n - Np_n| \geqslant \frac{1}{2} - N\varepsilon\right)$.

16. En déduire que pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) \leqslant 16N\varepsilon$.

17. En conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n = N) = 1$.

*Plus précisément, on peut démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n \sim \mathscr{B}(N, p_n)$.*

# Problème II - Géométrie du plan

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les quatre points $A\,(-1,-1)$, $B\,(3,-1)$, $C\,(3,3)$ et $D\,(-1,3)$. On notera $G$ le milieu de $[AD]$.

1. Faire une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
2. Montrer que $ABCD$ est un carré.
3. Déterminer les coordonnées de $G$.
4. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $M$ du plan tel que $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. Montrer que $\mathcal{E}$ admet pour équation
$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0.$$
5. Reconnaître l'ensemble $\mathcal{E}$.
6. Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle $ABC$. Préciser les coordonnées de $\Omega$ le centre de $\mathcal{C}$.
7. Calculer $R$ le rayon de $\mathcal{C}$ et donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
8. Déterminer l'intersection de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$.
9. Soit $H\left(-3-2\sqrt{2}, 1\right)$. Calculer la distance de $H$ à $(GB)$.
10. Calculer la distance de $H$ à $\mathcal{C}$.

Soient $d_1$ et $d_2$ les deux tangentes à $\mathcal{C}$ passant par $H$. On note $I_1$ le point d'intersection de $d_1$ avec $\mathcal{C}$ et $I_2$ celui de $d_2$ avec $\mathcal{C}$.

11. Déterminer $I_1$ et $I_2$.
*Réponse :* $\left(-3+2\sqrt{2}, 1+4\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$ *et* $\left(-3+2\sqrt{2}, 1-4\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$.
12. Déterminer une équation cartésienne et des équations paramétriques de $d_1$ et de $d_2$.
13. Montrer que $d_1$ et $d_2$ sont tangentes à $\mathcal{E}$.