Correction du Devoir Maison 12
Variables aléatoires et géométrie

Du jeudi 15 juin

Problème I - Variables aléatoires

Partie 1 : Préliminaire

1. (a) Comme la variable aléatoire X_1 compte le nombre de succès après N appels. X_1 est donc la somme de
   - N épreuves de Bernoulli
   - de même paramètre
   - indépendantes.

   Conclusion,
   $$\boxed{X_1 \sim \mathscr{B}(N,p)\,.}$$

   (b) On récite le cours,
   $$\boxed{X_1(\Omega) = [\![0;N]\!], \qquad \mathbb{E}(X_1) = Np, \qquad \mathbb{V}(X_1) = Np(1-p)\,,}$$
   et sa fonction génératrice est donnée par
   $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ G_{X_1}(t) = (1-p+pt)^n\,.}$$

2. (a) Sachant que $X_1 = i$ (i.e. i personnes ont répondu le premier jour) et que le secrétaire ne rappelle au deuxième jour que les personnes n'ayant pas répondu le premier jour, il sera amené à rappeler $N-i$ personnes le deuxième jour.
   Comme X_2 désigne le nombre de personnes ayant répondu au deuxième jour, il vient que :
   $$\boxed{\text{l'univers image de } X_2 \text{ sachant } X_1 = i \text{ est } [\![0, N-i]\!].}$$

   (b) Sachant que $X_1 = i$, la variable aléatoire X_2 compte le nombre de succès (personnes répondant à l'appel) après $N-i$ répétitions **indépendantes** d'une **même** épreuve de **Bernoulli** (N appels), il vient que la loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = i$ est la loi binomiale de paramètres $N-i$ et p, à savoir $\mathscr{B}(N-i,p)$.
   On en déduit alors que pour tout $j \in [\![0,N]\!]$:
   $$\boxed{\mathbb{P}(X_2 = j \mid X_1 = i) = \begin{cases} \binom{N-i}{j} p^j (1-p)^{N-i-j} & \text{si } j \in [\![0, N-i]\!] \\ 0. & \text{sinon} \end{cases}}$$

   (c) Posons $Z = (X_1, X_2)$. La loi conjointe $\mathbb{P}_{(X_1,X_2)}$ de Z est déterminée par la donnée de :
   - $\boxed{Z(\Omega) = X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) = [\![0,N]\!]^2}$;
   - puis, pour tout $(i,j) \in [\![0,N]\!]^2$, on a :

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = (i,j)) &= \mathbb{P}((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(X_2 = j \mid X_1 = i) \\ &= \begin{cases} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} \binom{N-i}{j} p^j (1-p)^{N-i-j} & \text{si } j \in [\![0, N-i]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![0;N]\!], \qquad \mathbb{P}(Z=(i,j)) = \begin{cases} \binom{N}{i}\binom{N-i}{j} p^{i+j}(1-p)^{2N-2i-j} & \text{si } j \in [\![0,N-i]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Partie 2 : Cas $N=2$

On suppose dans cette partie que $N=2$ et que $p=\frac{1}{2}$.

3. Sachant que $j=1 \in [\![0,N-i]\!] = [\![0,2-1]\!]$, on obtient avec la formule précédemment établie que :

$$\mathbb{P}((X_1=1)\cap(X_2=1)) = \binom{2}{1}\binom{2-1}{1}\frac{1}{2^{1+1}}\frac{1}{2^{2\times 2-2\times 1-1}} = 2\times 1\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1=1, X_2=1) = \frac{1}{4}.}$$

De même pour les autres valeurs, on obtient alors le tableau suivant :

X_2 \ X_1	0	1	2
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$
1	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	0
2	$\frac{1}{16}$	0	0

4. La loi $\mathbb{P}_{X_2}$ de X_2 est entièrement déterminée par la donnée de $X_2(\Omega)=\{0,1,2\}$. De plus, la famille $(X_1=i)_{i\in[\![0;2]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2=0) &= \mathbb{P}((X_2=0)\cap(X_1=0)) + \mathbb{P}((X_2=0)\cap(X_1=1)) + \mathbb{P}((X_2=0)\cap(X_1=2)) \\ &= \frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{4}{16} \\ &= \frac{9}{16}.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2=1) &= \mathbb{P}((X_2=1)\cap(X_1=0)) + \mathbb{P}((X_2=1)\cap(X_1=1)) + \mathbb{P}((X_2=1)\cap(X_1=2)) \\ &= \frac{2}{16}+\frac{4}{16}+0 \\ &= \frac{6}{16}.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2=2) &= \mathbb{P}((X_2=2)\cap(X_1=0)) + \mathbb{P}((X_2=2)\cap(X_1=1)) + \mathbb{P}((X_2=2)\cap(X_1=2)) \\ &= \frac{1}{16}+0+0 \\ &= \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

La loi marginale de X_2 est donc donnée par *(on somme chaque ligne du tableau précédent)*

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X_2 = k)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

5. On remarque que :
$$\mathbb{P}((X_2 = 0) \cap (X_1 = 0)) = \frac{1}{16}.$$
D'autre part, par la question précédente, $\mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{9}{16}$. D'autre part, par la question **??** $X_1 \sim \mathscr{B}(N, p) = \mathscr{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$ et donc $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \binom{2}{2}\frac{1}{2^0}\frac{1}{2^{2-0}} = \frac{1}{4}$. Ainsi,
$$\mathbb{P}(X_2 = 0) \times \mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{9}{16} \times \frac{1}{4} \neq \frac{1}{16} = \mathbb{P}((X_2 = 0) \cap (X_1 = 0)).$$
Conclusion,
$$\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

6. – *(Calcul de l'espérance de X_2)*
On a les égalités entre réels suivantes :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_2) &= \sum_{x_k \in X_2(\Omega)} x_k P(X_2 = x_k)\\ &= \sum_{k=0}^{2} k\mathbb{P}(X_2 = k)\\ &= 0 \times \frac{9}{16} + 1 \times \frac{6}{16} + 2 \times \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

– *(Calcul de la variance de X_2)*
Par la formule de Koenig-Huygens,
$$\mathbb{V}(X_2) = \mathbb{E}\left(X_2^2\right) - \mathbb{E}(X_2)^2.$$
Par le théorème de transfert et la question précédente,
$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_2) &= \sum_{k=0}^{2} k^2\mathbb{P}(X_2 = k) - \frac{1}{4}\\ &= 0 \times \frac{9}{16} + 1 \times \frac{6}{16} + 4 \times \frac{1}{16} - \frac{1}{4}\\ &= \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

– *(Calcul de la fonction génératrice)*
Par définition et la question précédente,
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_{X_2}(t) = \sum_{k=0}^{2} t^k\mathbb{P}(X_2 = k) = \frac{9 + 6t + t^2}{16}.$$

Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{V}(X_2) = \frac{3}{8}, \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ G_{X_2}(t) = \frac{9 + 6t + t^2}{16}.}$$

Partie 3 : loi de Z_n

On revient au cas général, où N est un entier naturel non nul quelconque et p un réel entre $]0;1[$.

7. (a) Par définition de Z_n, c'est le nombre total de personnes qui ont répondu durant les jours 1 à n et donc la somme sur k des personnes qui ont répondu le jour k. Il vient directement :

$$\boxed{Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.}$$

   (b) Il est possible que malgré les N appels du secrétaire, personne ne lui réponde. Dans ce cas, $Z_n = 0$. Il est aussi possible que durant les n appels tout le monde ait répondu (y compris il est possible que tout le monde ait répondu dès le premier jour). Ainsi,

$$\boxed{Z_n(\Omega) = [\![0;n]\!].}$$

   (c) Pffff toujours les mêmes questions. Puisque les X_i ne sont pas indépendantes (ni même a priori de même paramètre), $\boxed{\text{il n'est pas possible de conclure directement que } Z_n \text{ suit un loi binomiale}}$.

8. (a) On observe que $(Z_n = 0) = (X_1 = 0, \dots, X_n = 0)$. Par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_1 = \dots = X_{n-1} = 0) \\ \times \mathbb{P}(X_{n-1} = 0 \mid X_1 = \dots = X_{n-2} = 0) \\ \times \dots \times \mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_1 = 0).\end{aligned}$$

   Sachant $(X_1 = \dots = X_{n-1} = 0)$ réalisé, aucune personne n'a répondu durant les $n-1$ premiers jours. Le (pauvre) secrétaire est donc obligé de rappeler tout le monde le jour n. On observe alors que sachant $(X_1 = \dots = X_{n-1} = 0)$ réalisé, la loi de X_n est une binomiale de paramètre (N, p). Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_1 = \dots = X_{n-1} = 0) = \binom{N}{0} p^0 (1-p)^N = (1-p)^N.$$

   De même pour les autres probabilités y compris $\mathbb{P}(X_1 = 0) = (1-p)^N$, on obtient

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = \underbrace{(1-p)^N \times \dots \times (1-p)^N}_{n \text{ fois}} = (1-p)^{nN}.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_n = 0) = (1-p)^{nN}.}$$

   (b) Sachant que $p \in]0,1[$, il vient que $(1-p)^N \in]0,1[$. Ainsi, par convergence d'une suite géométrique de raison de module strictement inférieur à 1, il vient que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = 0.}$$

9. Soit $(i,j) \in [\![0,N]\!]^2$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_2 = j \mid Z_1 = i) &= \mathbb{P}(X_1 + X_2 = j \mid X_1 = i) \\
&= \mathbb{P}(X_2 = j - i \mid X_1 = i) \\
&\underset{q2.(b)}{=} \begin{cases} \binom{N-i}{j-i} p^{j-i}(1-p)^{N-j} & \text{si } 0 \leqslant j-i \leqslant N-i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \binom{N-i}{j-i} p^{j-i}(1-p)^{N-j} & \text{si } j \geqslant i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_2 = j \ Z_1 = i) = \begin{cases} \binom{N-i}{j-i} p^{j-i}(1-p)^{N-j} & \text{si } j \geqslant i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

10. Sachant que la famille $(\{Z_1 = i\})_{i\in[\![0,N]\!]}$ forme un système complet d'évènements, la formule des probabilités totales permet d'écrire les égalités entre réels suivantes pour tout $j \in [\![0,N]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_2 = j) &= \sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}(Z_1 = i)\mathbb{P}(Z_2 = j \mid Z_1 = i) \\
&= \sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(Z_2 = j \mid Z_1 = i) \\
&= \sum_{i=0}^{j} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} \binom{N-i}{j-i} p^{j-i}(1-p)^{N-j} \\
&= p^j (1-p)^{2N-2j} \sum_{i=0}^{j} \binom{N}{i}\binom{N-i}{j-i}(1-p)^{j-i}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall j \in [\![0,N]\!],\ \mathbb{P}(Z_2 = j) = p^j (1-p)^{2N-2j} \sum_{i=0}^{j} \binom{N}{i}\binom{N-i}{j-i}(1-p)^{j-i}.}$$

11. On a les égalités entre entiers naturels suivantes :

$$\frac{\binom{N-i}{j-i}\binom{N}{i}}{\binom{j}{i}} = \frac{\frac{(N-i)!}{(j-i)!(N-j)!} \times \frac{N!}{i!(N-i)!}}{\frac{j!}{i!(j-i)!}} = \frac{N!}{j!(N-j)!} = \binom{N}{j}$$

Conclusion :

$$\boxed{\frac{\binom{N-i}{j-i}\binom{N}{i}}{\binom{j}{i}} = \binom{N}{j}.}$$

12. On a les égalités entre réels suivantes pour tout $j \in [\![0, N]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_2 = j) &= p^j(1-p)^{2N-2j}\sum_{i=0}^{j}\binom{N-i}{j-i}\binom{N}{i}(1-p)^{j-i} \\
&= \binom{N}{j}p^j(1-p)^{2N-2j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(1-p)^{j-i}\times 1^i \\
&\underset{\substack{\text{binôme}\\ \text{de Newton}}}{=} \binom{N}{j}p^j(1-p)^{2N-2j}((1-p)+1)^j \\
&= \binom{N}{j}(p(2-p))^j((1-p)^2)^{N-j} \\
&= \binom{N}{j}(p(2-p))^j(1-p(2-p))^{N-j} \\
&= \binom{N}{j}p_2^j(1-p_2)^{N-j}
\end{aligned}$$

Ainsi, $Z_2(\Omega) = [\![0, N]\!]$ et $\forall j \in [\![0; N]\!]$, $\mathbb{P}(Z_2 = j) = \binom{N}{j}p_2^j(1-p_2)^{N-j}$, autrement dit :

$$\boxed{Z_2 \sim \mathscr{B}(N, p_2).}$$

Partie 4 : Convergence de Z_n

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Z_n) = Np_n$ et $\mathbb{V}(Z_n) = Np_n(1-p_n)$, où $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels définie par récurrence par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = (1-p)\,p_n + p \qquad \text{et} \qquad p_1 = p.$$

13. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique. Pour déterminer son expression explicite, on procède de la manière suivante :

   – *Recherche du point fixe :*
   Résolvons l'équation $x = (1-p)x + p$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

   $$x = (1-p)x + p \Longleftrightarrow (1-(1-p))x = p \underset{p\neq 0}{\Longleftrightarrow} x = 1$$

   – *Suite pivot géométrique :*
   Montrons que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (p_n - 1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison x.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons :

   $$q_{n+1} = p_{n+1} - 1 = (1-p)p_n + p - 1 = (1-p)(p_n - 1) = (1-p)q_n$$

   Ainsi, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $1-p$ et sa forme explicite est donnée par :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_n = (1-p)^{n-1}q_1 \underset{q_1=p-1}{=} -(1-p)^n$$

   Enfin, sachant que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (q_n + 1)_{n\in\mathbb{N}^*}$, il vient que :

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = 1 - (1-p)^n.}$$

Soit $\varepsilon \in \left]0; \frac{1}{4N}\right[$.

14. Par la question précédente, puisque $1-p \in]0;1[$ *(important à préciser !)*, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1-(1-p)^n = 1$. Donc puisque $\varepsilon > 0$, par définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,
$$|1-p_n| \leqslant \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad 1-\varepsilon \leqslant p_n \leqslant 1+\varepsilon\,.$$
Et puisque que de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = 1-(1-p)^n \leqslant 1$. On en déduit que
$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0, \qquad 1-\varepsilon \leqslant p_n \leqslant 1.}$$

15. Soit $n \geqslant n_0$. Puisque $1-p<1$, $(1-p)^n < 1$ et donc $p_n > 0$. D'où
$$\begin{aligned}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) &= \left(N - Z_n + Np_n - Np_n \geqslant \frac{1}{2}\right)\\ &= \left(Np_n - Z_n + (1-p_n)\,N \geqslant \frac{1}{2}\right)\\ &= \left(Np_n - Z_n \geqslant \frac{1}{2} - (1-p_n)\,N\right).\end{aligned}$$
Or par la question prédédente, $p_n \geqslant 1-\varepsilon$ donc $1-p_n \leqslant \varepsilon$, puisque $N>0$, $(1-p_n)\,N \leqslant \varepsilon\,N$ ou encore $\frac{1}{2} - (1-p_n)\,N \geqslant \frac{1}{2} - \varepsilon\,N$. Donc
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(Np_n - Z_n \geqslant \frac{1}{2} - (1-p_n)\,N\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(Np_n - Z_n \geqslant \frac{1}{2} - \varepsilon\,N\right)\\ &\leqslant \mathbb{P}\left(|Np_n - Z_n| \geqslant \frac{1}{2} - \varepsilon\,N\right)\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|Z_n - Np_n| \geqslant \frac{1}{2} - N\,\varepsilon\right).}$$

16. Par l'énoncé, on sait que $\mathbb{E}\left(Z_n\right) = Np_n$. Donc
$$\mathbb{P}\left(|Z_n - Np_n| \geqslant \frac{1}{2} - N\,\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|Z_n - \mathbb{E}\left(Z_n\right)| \geqslant \frac{1}{2} - N\,\varepsilon\right).$$
De plus, $\varepsilon < \frac{1}{4N}$. Donc $N\,\varepsilon < \frac{1}{4}$ et donc $\frac{1}{2} - N\,\varepsilon > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Ainsi,
$$\mathbb{P}\left(|Z_n - Np_n| \geqslant \frac{1}{2} - N\,\varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|Z_n - \mathbb{E}\left(Z_n\right)| \geqslant \frac{1}{4}\right).$$
Donc par la question précédente,
$$\mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|Z_n - \mathbb{E}\left(Z_n\right)| \geqslant \frac{1}{4}\right).$$
Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,
$$\mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}\left(Z_n\right)}{\left(1/4\right)^2} = 16\mathbb{V}\left(Z_n\right) = 16Np_n\left(1-p_n\right).$$
Mais puisque $p_n \leqslant 1$ et $p_n \leqslant 1-\varepsilon$, on a $1-p_n \leqslant \varepsilon$ et donc
$$\boxed{\forall n \geqslant n_0, \qquad \mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) \leqslant 16N\,\varepsilon\,.}$$

17. A N fixé, on a donc montré que pour tout $\varepsilon\,]0;\frac{1}{4N}[$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant \mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) \leqslant 16N\,\varepsilon$. Par définition même de la limite,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right) &= \mathbb{P}\left(N - \frac{1}{2} \geqslant Z_n\right)\\ &= \mathbb{P}(N > Z_n) &&\text{car } Z_n \text{ est à valeurs entières}\\ &= 1 - \mathbb{P}(Z_n = N) &&\text{car } Z_n(\Omega) = [\![0;N]\!] \text{ par la question } \textbf{??}\end{aligned}$$

Conclusion, $(\mathbb{P}(Z_n = N))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n = N) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \mathbb{P}\left(N - Z_n \geqslant \frac{1}{2}\right)\right) = 1.}$$

Asymptotiquement, le secrétaire finit par avoir ses N interlocuteurs aussi résistants soient-ils.

On peut démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n \sim \mathscr{B}(N, p_n)$.

Problème II - Géométrie du plan

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les quatre points $A(-1,-1)$, $B(3,-1)$, $C(3,3)$ et $D(-1,3)$. On notera G le milieu de $[AD]$.

1. Faire une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

2. Calculons,

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3+1 \\ -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{DC} = \begin{bmatrix} 3+1 \\ 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et donc $ABCD$ est un parallélogramme. De plus,

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4, \qquad AD = \left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\begin{bmatrix} -1+1 \\ 3+1 \end{bmatrix}\right\| = \left\|\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}\right\| = 4.$$

Donc $ABCD$ est un losange. Enfin,

$$\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}\right\rangle = 0.$$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux donc $ABCD$ est aussi un rectangle. Conclusion,

$$\boxed{ABCD \text{ est un carré.}}$$

3. Puisque G est le milieu de AD, on a

$$x_G = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{-1-1}{2} = -1 \qquad y_G = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

Conclusion, les coordonnées de G sont

$$\boxed{G(-1,1)}$$

4. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan tel que $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.
   Soit $M(x,y)\in\mathscr{P}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M\in\mathcal{E} \quad & \Leftrightarrow \quad \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\
& \Leftrightarrow \quad \left\|2\begin{bmatrix}-1-x\\-1-y\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3-x\\-1-y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3-x\\3-y\end{bmatrix}\right\|=4 \\
& \Leftrightarrow \quad \left\|\begin{bmatrix}-2-2x-3+x+3-x\\-2-2y+1+y+3-y\end{bmatrix}\right\|=4 \\
& \Leftrightarrow \quad \left\|\begin{bmatrix}-2-2x\\2-2y\end{bmatrix}\right\|=4 \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt{(2+2x)^2+(2-2y)^2}=4 \\
& \Leftrightarrow \quad 4+8x+4x^2+4-8y+4y^2=16 \qquad \text{OK pour la réciproque car } 4\geqslant 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x^2+2x+y^2-2y-2=0.
\end{aligned}$$

   Conclusion, $\mathcal{E}$ admet pour équation

$$\boxed{\mathcal{E}: \qquad x^2+y^2+2x-2y-2=0.}$$

5. Par la question précédente, pour $M(x,y)\in\mathscr{P}$, on a

$$\begin{aligned}
M\in\mathcal{E} \quad & \Leftrightarrow \quad x^2+y^2+2x-2y-2=0 \\
& \Leftrightarrow \quad (x+1)^2-1+(y-1)^2-1-2=0 \\
& \Leftrightarrow \quad (x+1)^2+(y-1)^2=2^2.
\end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est le cercle de centre } (-1,1) \text{ et de rayon } 2.}$$

6. Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. Puisque $ABCD$ est un carré, ABC est un triangle rectangle isocèle en B. Par conséquent $[AC]$ constitue une diagonale du cercle inscrit et Ω est donc le milieu de $[AC]$ et a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(\frac{-1+3}{2},\frac{-1+3}{2}\right)=(1,1).$$

   Conclusion, le centre de $\mathcal{C}$ est donné par

$$\boxed{\Omega(1,1).}$$

7. Puisque $A\in\mathcal{C}$, on a $R=A\Omega$. D'où

$$R=\left\|\overrightarrow{A\Omega}\right\|=\left\|\begin{bmatrix}1+1\\1+1\end{bmatrix}\right\|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}.$$

   Par suite, une équation de $\mathcal{C}$ est donnée par

$$(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=R^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-1)^2+(y-1)^2=8.$$

   Conclusion,

$$\boxed{R=2\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}: \qquad (x-1)^2+(y-1)^2=8.}$$

8. Soit $M(x,y) \in \mathscr{P}$. Par les questions précédentes, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{E} \cap \mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=4\\(x-1)^2+(y-1)^2=8\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=4\\(x-1)^2+(y-1)^2=8\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=4\\(x-1)^2-(x+1)^2=4\end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=4\\(x-1-x-1)(x-1+x+1)=4\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=4\\-2(2x)=4\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=4\\x=-1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(y-1)^2=4\\x=-1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}y-1=2\\x=-1\end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases}y-1=-2\\x=-1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad (x,y)=(-1,3) \quad \text{OU} \quad (x,y)=(-1,1).
\end{aligned}$$

Il est logique de trouver deux points pour l'intersection des deux cercles car, en notant $\Omega' = (-1,1)$ le centre du cercle $\mathcal{E}$ et $R' = 2$ son rayon, on a

$$\Omega\,\Omega' = \left\| \begin{bmatrix} -1-1 \\ 1-1 \end{bmatrix} \right\| = 2.$$

Donc on a bien $|R - R'| < \Omega\,\Omega' < R + R'$. Conclusion, $\mathcal{E} \cap \mathcal{C}$ est un ensemble de deux points :

$$\boxed{U(-1,3) \text{ et } V(-1,1).}$$

9. Soit $H\left(-3-2\sqrt{2}, 1\right)$. Le vecteur $\overrightarrow{GB}$ est une vecteur directeur de (GB) et

$$\overrightarrow{GB} = \begin{bmatrix} 3+1 \\ -1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Donc $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à (GB). Puisque $G \in (GB)$, on a

$$d(H,(GB)) = \left|\left\langle \overrightarrow{GH}, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle\right| = \left|\left\langle \begin{bmatrix} -3-2\sqrt{2}+1 \\ 1-1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}\left|-2-2\sqrt{2}\right|.$$

Conclusion,

$$\boxed{d(H,(GB)) = \frac{2\sqrt{5}}{5}\left(1+\sqrt{2}\right).}$$

10. Puisque Ω est le centre de $\mathcal{C}$ et R son rayon, on a

$$d(H,\mathcal{C}) = |H\,\Omega - R| = \left| \left\| \begin{bmatrix} 1+3+2\sqrt{2} \\ 1-1 \end{bmatrix} \right\| - 2\sqrt{2} \right| = \left|4+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right| = 4.$$

Conclusion,

$$\boxed{d(H,\mathcal{C}) = 4.}$$

Soient d_1 et d_2 les deux tangentes à $\mathcal{C}$ passant par H. On note I_1 le point d'intersection de d_1 avec $\mathcal{C}$ et I_2 celui de d_2 avec $\mathcal{C}$.

11. Soit $I(x,y) \in \mathscr{P}$. Notons $\mathcal{S} = \{I_1, I_2\}$ l'ensemble des points d'intersection d'une tangente à $\mathcal{C}$ passant par H. On a

$$\begin{aligned}
I \in \mathcal{S} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} I \in \mathcal{C} \\ \overrightarrow{HI} \perp \overrightarrow{\Omega I} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ \left\langle \overrightarrow{HI}, \overrightarrow{\Omega I} \right\rangle = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ \left\langle \begin{bmatrix} x+3+2\sqrt{2} \\ y-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ \left(x+3+2\sqrt{2}\right)(x-1) + (y-1)^2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ \left(x+3+2\sqrt{2}\right)(x-1) - (x-1)^2 = -8 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\left(x+3+2\sqrt{2}\right)(x-1) - (x-1)^2 = -8 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(x+3+2\sqrt{2}-x+1\right)(x-1) = -8 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(4+2\sqrt{2}\right)(x-1) = -8 \\
&\Leftrightarrow \quad x-1 = -\frac{4}{2+\sqrt{2}} = -\frac{4\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2} = -2\left(2-\sqrt{2}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x = -3+2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$I \in \mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ x = -3+2\sqrt{2} \end{cases} .$$

Puis si $x = -3+2\sqrt{2}$, on a

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(-4+2\sqrt{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 8 \\
&\Leftrightarrow \quad (y-1)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(-4+2\sqrt{2}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (y-1)^2 = \left(2\sqrt{2}+4-2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}-4+2\sqrt{2}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad (y-1)^2 = 4\left(4\sqrt{2}-4\right) = 16\left(\sqrt{2}-1\right) \\
&\Leftrightarrow \quad y-1 = 4\sqrt{\sqrt{2}-1} \;\text{ OU }\; y-1 = -4\sqrt{\sqrt{2}-1} \\
&\Leftrightarrow \quad y = 1+4\sqrt{\sqrt{2}-1} \;\text{ OU }\; y = 1-4\sqrt{\sqrt{2}-1}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$I \in \mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -3 + 2\sqrt{2} \\ y = 1 + 4\sqrt{\sqrt{2} - 1} \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -3 + 2\sqrt{2} \\ y = 1 - 4\sqrt{\sqrt{2} - 1} \end{cases}.$$

Conclusion,

$$\boxed{I_1\left(-3 + 2\sqrt{2}, 1 + 4\sqrt{\sqrt{2} - 1}\right) \quad \text{et} \quad I_2\left(-3 + 2\sqrt{2}, 1 - 4\sqrt{\sqrt{2} - 1}\right) \qquad \textit{ou l'inverse...}}$$

12. On note que $d_1 = (HI_1)$. Donc un vecteur directeur est donné par $\overrightarrow{HI_1} = \begin{bmatrix} -3 + 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} \\ 1 + 4\sqrt{\sqrt{2} - 1} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{\sqrt{2} - 1} \end{bmatrix}$. De plus $H \in d_1$. Donc des équations paramétriques de d_1 sont

$$\boxed{d_1 : \quad \begin{cases} x = -3 - 2\sqrt{2} + t4\sqrt{2} \\ y = 1 + t4\sqrt{\sqrt{2} - 1} \end{cases}.}$$

Pour l'équation cartésienne, quatre méthodes.

Méthode 1. Soit $M(x, y) \in \mathscr{P}$. On a

$$\begin{aligned} M \in d_1 \quad & \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{HM} \text{ et } \overrightarrow{HI_1} \text{ colinéaires} \\ & \Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HI_1}\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x + 3 + 2\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ y - 1 & 4\sqrt{\sqrt{2} - 1} \end{vmatrix} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad 4\sqrt{\sqrt{2} - 1}x + 4\left(3 + 2\sqrt{2}\right)\sqrt{\sqrt{2} - 1} - 4\sqrt{2}y + 4\sqrt{2} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad 4\sqrt{\sqrt{2} - 1}x - 4\sqrt{2}y = -4\left(3 + 2\sqrt{2}\right)\sqrt{\sqrt{2} - 1} - 4\sqrt{2} \\ & \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2} - 1}x - 2y = -\left(3\sqrt{2} + 4\right)\sqrt{\sqrt{2} - 1} - 2. \end{aligned}$$

Méthode 2. A l'aide de $\overrightarrow{HI_1}$, on en déduit que $\begin{bmatrix} 4\sqrt{\sqrt{2} - 1} \\ -4\sqrt{2} \end{bmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{n_1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{2} - 1} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à d_1. Soit $M(x, y) \in \mathscr{P}$. On a

$$\begin{aligned} M \in d_1 \quad & \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{HM} \text{ et } \overrightarrow{n_1} \text{ sont orthogonaux} \\ & \Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{HM}, \overrightarrow{n_1} \right\rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix} x + 3 + 2\sqrt{2} \\ y - 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{2} - 1} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \sqrt{\sqrt{2} - 1}x + \left(3 + 2\sqrt{2}\right)\sqrt{\sqrt{2} - 1} - \sqrt{2}y + \sqrt{2} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2} - 1}x - 2y = -\left(3\sqrt{2} + 4\right)\sqrt{\sqrt{2} - 1} - 2. \end{aligned}$$

Méthode 3. Puisque $\overrightarrow{n_1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{2} - 1} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à d_1. Alors

$$\exists d \in \mathbb{R}, \ \sqrt{\sqrt{2} - 1}x - \sqrt{2}y = d.$$

Or $H \in d_1$ donc

$$d = \sqrt{\sqrt{2}-1}\left(-3-2\sqrt{2}\right) - \sqrt{2} = -\sqrt{\sqrt{2}-1}\left(3+2\sqrt{2}\right) - \sqrt{2}.$$

Ainsi, une équation cartésienne de d_1 est

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sqrt{2}-1}x - \sqrt{2}y = -\sqrt{\sqrt{2}-1}\left(3+2\sqrt{2}\right) - \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}x - 2y = -\left(3\sqrt{2}+4\right)\sqrt{\sqrt{2}-1} - 2. \end{aligned}$$

Méthode 4. Ouf après on arrête ! Par les équations paramétriques, pour $M(x,y) \in \mathscr{P}$,

$$\begin{aligned} M \in d_1 \quad & \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} t = \frac{x+3+2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \\ y = 1 + t4\sqrt{\sqrt{2}-1} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} t = \frac{x\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4}{8} \\ y = 1 + \frac{x\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4}{8}4\sqrt{\sqrt{2}-1} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad y = 1 + \frac{x\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4}{8}4\sqrt{\sqrt{2}-1} \\ & \Leftrightarrow \quad 8y = 8 + 4\left(3\sqrt{2}+4\right)\sqrt{\sqrt{2}-1} \\ & \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}x - 2y = -2 - \left(3\sqrt{2}+4\right)\sqrt{\sqrt{2}-1}. \end{aligned}$$

Conclusion, quelque soit la méthode, on obtient,

$$\boxed{d_1 : \qquad \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}x - 2y = -\left(3\sqrt{2}+4\right)\sqrt{\sqrt{2}-1} - 2.}$$

De la même façon, $\overrightarrow{HI_2} = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{\sqrt{2}-1} \end{bmatrix}$. Donc les équations paramétriques sont données par

$$\boxed{d_2 : \qquad \begin{cases} x = -3-2\sqrt{2}+t4\sqrt{2} \\ y = 1 - t4\sqrt{\sqrt{2}-1} \end{cases}.}$$

Puis, toujours de même, appliquons par exemple la méthode 1, pour $M(x,y) \in \mathscr{P}$. On a

$$\begin{aligned} M \in d_2 \quad & \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{HM} \text{ et } \overrightarrow{HI_2} \text{ colinéaires} \\ & \Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HI_2}\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x+3+2\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ y-1 & -4\sqrt{\sqrt{2}-1} \end{vmatrix} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad -4\sqrt{\sqrt{2}-1}x - 4\left(3+2\sqrt{2}\right)\sqrt{\sqrt{2}-1} - 4\sqrt{2}y + 4\sqrt{2} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}x + 2y = -\left(3\sqrt{2}+4\right)\sqrt{\sqrt{2}-1} - 2. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{d_1 : \qquad \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}x + 2y = -\left(3\sqrt{2}+4\right)\sqrt{\sqrt{2}-1} - 2.}$$

13. Pour montrer que d_1 est tangente à $\mathcal{E}$, montrons que la distance de $\Omega'(-1,1)$ est à une distance $R'=2$ de la droite d_1. Puisque $H \in d_1$ et que $\overrightarrow{n_1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{2}-1} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à d_1, on a

$$\begin{aligned}
d\left(\Omega', d_1\right) &= \left|\left\langle \overrightarrow{H\,\Omega'}, \frac{\overrightarrow{n_1}}{\|\overrightarrow{n_1}\|}\right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle \begin{bmatrix} -1+3+2\sqrt{2} \\ 1-1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1+2}} \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{2}-1} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}\right\rangle\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} \left|\left\langle \begin{bmatrix} 2+2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{2}-1} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}\right\rangle\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} \left(2+2\sqrt{2}\right) \sqrt{\sqrt{2}-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}+1} 2\left(1+\sqrt{2}\right) \sqrt{2-1} \\
&= 2 = R'.
\end{aligned}$$

De même, $\overrightarrow{n_2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{2}-1} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à d_2

$$\begin{aligned}
d\left(\Omega', d_2\right) &= \left|\left\langle \overrightarrow{H\,\Omega'}, \frac{\overrightarrow{n_2}}{\|\overrightarrow{n_2}\|}\right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle \begin{bmatrix} 2+2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1+2}} \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{2}-1} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}\right\rangle\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} \left(2+2\sqrt{2}\right) \sqrt{\sqrt{2}-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}+1} 2\left(1+\sqrt{2}\right) \sqrt{2-1} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les droites } d_1 \text{ et } d_2 \text{ sont tangentes à } \mathcal{E}.}$$