Correction du Devoir Maison 4
Calcul d'intégrales, Equations différentielles d'ordre 1 et 2

Du jeudi 08 décembre

Exercice I - Calcul d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^\pi \mathrm{e}^{nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Partie 1 : L'ordre 1, c'est déjà bien

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{nx}\sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont et donc notamment sur **le segment** $[0;\pi]$. Donc I_n existe. De même la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)$ est continue sur **le segment** $[0;\pi]$ donc J_n existe. Conclusion

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \text{ et } J_n \text{ existent.}}$$

2. On a les égalités dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^\pi \mathrm{e}^0 \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [-\cos(x)]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= 1+1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I_0 = 2.}$$

3. On a

$$I_1 = \int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Posons

$$\forall x \in [0;\pi], \qquad \begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = \sin(x) \end{cases}.$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;\pi]$ et

$$\forall x \in [0;\pi], \qquad \begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = \cos(x) \end{cases}.$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [\mathrm{e}^x \sin(x)]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 - 0 - \int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Posons,

$$\forall x \in [0;\pi], \qquad \begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = \cos(x) \end{cases}.$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;\pi]$ et

$$\forall x \in [0;\pi], \qquad \begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = -\sin(x) \end{cases}.$$

Donc à nouveau, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\left[\mathrm{e}^x \cos(x)\right]_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi \mathrm{e}^x\left(-\sin(x)\right)\mathrm{d}x \\ &= -\left(-\mathrm{e}^\pi - \mathrm{e}^0\right) - I_1 \\ &= \mathrm{e}^\pi + 1 - I_1. \end{aligned}$$

Dès lors, on obtient que $2I_1 = \mathrm{e}^\pi + 1$. Conclusion,

$$\boxed{I_1 = \frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}.}$$

On pouvait aussi faire les deux intégrations par parties dans l'autre sens : intégrer le sinus et dériver l'exponentielle (ici j'ai dérivé le sinus et intégré l'exponentielle). L'important est de faire les deux intégrations par parties « dans le même sens » sinon vous revenez au point de départ sans avoir avancé.

4. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \mathrm{e}^x \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{ix}\right)\mathrm{d}x \\ &= \operatorname{Im}\left(\int_0^\pi \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\int_0^\pi \mathrm{e}^{(1+i)x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(1+i)x}}{1+i}\right]_{x=0}^{x=\pi}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{(1+i)\pi} - 1}{1+i}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{\left(\mathrm{e}^\pi(-1) - 1\right)(1-i)}{2}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(-\frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}(1-i)\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat précédent,

$$\boxed{I_1 = \frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}.}$$

Partie 2 : Un aperçu du chapitre 23, on a hâte !

On ne calculera pas dans cette partie la valeur de I_n.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la relation de Chasles, on a

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{e}^{nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \mathrm{e}^{nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \mathrm{e}^{nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

De plus, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$, $\sin(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{nx} > 0$, donc $\mathrm{e}^{nx}\sin(x) \geqslant 0$. Par croissance de l'intégrale CAR LES BORNES SONT DANS SENS,

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{e}^{nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

De même, pour tout $x \in \left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$, $\sin(x) \geqslant 0$, donc

$$\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \mathrm{e}^{nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

Dès lors,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{e}^{nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \mathrm{e}^{nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \mathrm{e}^{nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0 + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \mathrm{e}^{nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x + 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n \geqslant \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \mathrm{e}^{nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x.}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$, on a $\sin(x) \geqslant \frac{1}{2}$. Par suite, $\mathrm{e}^{nx}\sin(x) \geqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{nx}$ car $\mathrm{e}^{nx} > 0$. Donc par croissance de l'intégrale, car $\frac{5\pi}{6} \geqslant \frac{\pi}{6}$,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \mathrm{e}^{nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{d}x.$$

Donc par la question précédente,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n \geqslant \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{d}x.}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{nx}}{n}\right]_{x=\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{\frac{5n\pi}{6}} - \mathrm{e}^{\frac{n\pi}{6}}}{n} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{5n\pi}{6}}}{\frac{5n\pi}{6}}\frac{6}{5\pi}\frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{4n\pi}{6}}\right).\end{aligned}$$

Or en posant $u = \frac{5n\pi}{6} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par croissance comparée, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{5n\pi}{6}}}{\frac{5n\pi}{6}} = \lim_{u \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^u}{u} = +\infty.$$

Donc par produit,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \mathrm{e}^{nx} = +\infty \times \frac{3}{5\pi} \times (1-0) = +\infty.$$

Or par la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n \geqslant \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{d}x.$$

Donc par le théorème de minoration, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty.}$$

8. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a vu à la question précédente que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{\frac{5n\pi}{6}} - \mathrm{e}^{\frac{n\pi}{6}}}{n} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{5n\pi}{6}}}{2n}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{4n\pi}{6}}\right).$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n^p}\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\frac{5n\pi}{6}}}{n^{p+1}}\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{2n\pi}{3}}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{5n\pi}{6}}}{\left(\frac{5n\pi}{6}\right)^{p+1}}\left(\frac{6}{5\pi}\right)^{p+1}\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{2n\pi}{3}}}{2}.$$

Par croissance comparée, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{5n\pi}{6}}}{\left(\frac{5n\pi}{6}\right)^{p+1}} = \lim_{u\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{u}}{u^p} = +\infty.$$

Donc par produit,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p}\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{d}x = +\infty \times \left(\frac{6}{5\pi}\right)^{p+1} \times \frac{1}{2} = +\infty.$$

Or par la question 6.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{I_n}{n^p} = \frac{1}{n^p}\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{d}x, \qquad\qquad \text{car } n^p > 0.$$

Donc par le théorème de minoration,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n^p} = +\infty.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \qquad n^p \underset{n\to+\infty}{\ll} I_n.}$$

On pouvait aussi résoudre les deux dernières questions en observant que

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\mathrm{e}^{n\frac{\pi}{6}}}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{n\frac{\pi}{6}}}{2}\frac{4\pi}{6} = \mathrm{e}^{n\frac{\pi}{6}}\frac{\pi}{3}.$$

Ce qui simplifie alors les calculs car, on a bien $\mathrm{e}^{n\frac{\pi}{6}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *et même* $\frac{1}{n^p}\mathrm{e}^{n\frac{\pi}{6}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\mathrm{e}^{n\pi} J_n = \mathrm{e}^{n\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{n(\pi-x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Posons pour tout $x \in [0;\pi]$, $y = \pi - x$ ou encore pour tout $[0;\pi]$, $x = \varphi(y) = \pi - y$. La fonction φ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi]$ et $\mathrm{d}x = \varphi'(y)\,\mathrm{d}y = -\,\mathrm{d}y$. Dès lors, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{n\pi} J_n &= \int_\pi^0 \mathrm{e}^{ny} \sin(\pi - y)\,(-1)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\pi \mathrm{e}^{ny} \sin(\pi - y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\pi \mathrm{e}^{ny} \sin(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\pi \mathrm{e}^{nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{car l'indice est muet.}
\end{aligned}$$

Conclusion, on a bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \mathrm{e}^{n\pi} J_n.}$$

Partie 3 : Finalement, l'ordre suivant, c'est pas plus méchant

10. Allez pas de jaloux, je fais les deux méthodes.

Méthode 1, par intégrations par parties. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour changer, cette fois-ci je dérive l'exponentielle et j'intègre le sinus. Posons

$$\forall x \in [0;\pi], \qquad \begin{cases} u(x) = -\cos(x) \\ v(x) = \mathrm{e}^{nx} \end{cases}.$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;\pi]$ et

$$\forall x \in [0;\pi], \qquad \begin{cases} u'(x) = \sin(x) \\ v'(x) = n\,\mathrm{e}^{nx} \end{cases}.$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\pi \mathrm{e}^{nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\,\mathrm{e}^{nx}\cos(x)\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi n\,\mathrm{e}^{nx}\,(-\cos(x))\,\mathrm{d}x \\
&= -\left(-\,\mathrm{e}^{n\pi} - 1\right) + n\int_0^\pi \mathrm{e}^{nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{n\pi} + 1 + n\int_0^\pi \mathrm{e}^{nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Posons,

$$\forall x \in [0;\pi], \qquad \begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v(x) = \mathrm{e}^{nx} \end{cases}.$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;\pi]$ et

$$\forall x \in [0;\pi], \qquad \begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v'(x) = n\,\mathrm{e}^{nx} \end{cases}.$$

Donc à nouveau, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
I_n &= \mathrm{e}^{n\pi} + 1 + n\int_0^\pi \mathrm{e}^{nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{n\pi} + 1 + n\left[\mathrm{e}^{nx}\sin(x)\right]_{x=0}^{x=\pi} - n\int_0^\pi n\,\mathrm{e}^{nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{n\pi} + 1 + n\,(0-0) - n^2 I_n \\
&= \mathrm{e}^{n\pi} + 1 - n^2 I_n.
\end{aligned}$$

Dès lors, on obtient que $\left(n^2+1\right) I_n = \mathrm{e}^{n\pi} + 1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n = \frac{\mathrm{e}^{n\pi}+1}{n^2+1}.}$$

Méthode 2, par les complexes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\pi \mathrm{e}^{nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \mathrm{e}^{nx} \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{ix}\right)\mathrm{d}x \\
&= \operatorname{Im}\left(\int_0^\pi \mathrm{e}^{(n+i)x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(n+i)x}}{n+i}\right]_{x=0}^{x=\pi}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{(n+i)\pi}-1}{n+i}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{-\mathrm{e}^{n\pi}-1}{n+i}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(-\frac{\left(\mathrm{e}^{n\pi}+1\right)(n-i)}{n^2+1}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{n\pi}+1}{n^2+1}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n = \frac{\mathrm{e}^{n\pi}+1}{n^2+1}.}$$

On peut vérifier son résultat en prenant $n = 1$, on retrouve bien le résultat de la question 4.

11. Par la question 9. et la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad J_n = \mathrm{e}^{-n\pi} I_n = \mathrm{e}^{-n\pi}\frac{\mathrm{e}^{n\pi}+1}{n^2+1} = \frac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}.$$

Attention, cette fois-ci la question parle de n dans $\mathbb{N}$ tout entier. De plus, $J_0 = \in_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = I_0 = 2$ par la question 2. Donc la formule reste vraie pour $n = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad J_n = \frac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}.}$$

12. Par la question 10.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n = \frac{\mathrm{e}^{n\pi}+1}{n^2+1} = \frac{\mathrm{e}^{n\pi}}{(n\pi)^2}\pi^2\frac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{1+\frac{1}{n^2}}.$$

Conclusion, par croissance comparée, on retrouve bien que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty.}$$

Partie 4 : Toujours se ramener à ce que l'on sait faire

13. La fonction $x \mapsto x^5 \sin(\ln(x))$ est définie et même continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc notamment sur **le segment** $[1;\mathrm{e}^\pi]$. Donc $\boxed{K \text{ existe}}$. Posons pour tout $x \in [1;\mathrm{e}^\pi]$, $t = \ln(x)$ ou encore pour tout $t \in [0;\pi]$, $x = \varphi(t) = \mathrm{e}^t$. La fonction φ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi]$ et pour tout $t \in [0;\pi]$, $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$K = \int_1^{\mathrm{e}^\pi} x^5 \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \left(\mathrm{e}^t\right)^5 \sin(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \mathrm{e}^{6t}\sin(t)\,\mathrm{d}t = I_6.$$

Donc par ce qui précède, on en déduit que

$$\boxed{K = \frac{\mathrm{e}^{6\pi}+1}{37}.}$$

14. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{6x}\cos(x)\sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur **le segment** $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\boxed{L \text{ existe}}$. De plus,

$$L = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{6x}\cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{6x}\frac{1}{2}\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{6x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x.$$

Posons pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $t = 2x$ i.e. pour tout $t \in [0;\pi]$, $x = \varphi(t) = \frac{t}{2}$. La fonction φ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi]$ et $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$. Donc

$$L = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{3t}\sin(t)\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}I_3.$$

Conclusion, par ce qui précède,

$$\boxed{L = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{e}^{3\pi}+1}{10} = \frac{\mathrm{e}^{3\pi}+1}{40}.}$$

Exercice II - Equation différentielle d'ordre 2

On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + 2y'(x) + 4y(x) = x\,\mathrm{e}^x.$$

1. La fonction $d : x \mapsto x\,\mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et les coefficients $a = 1$, $b = 2$ et $c = 4$ sont constants. Donc l'équation différentielle d'ordre 2 $\boxed{(E) \text{ admet des solutions sur } \textbf{l'intervalle } \mathbb{R} \text{ tout entier.}}$

2. L'équation différentielle homogène associée à (E) est donnée par

$$(E_0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + 2y'(x) + 4y(x) = 0.$$

Son équation caractéristique associée est $(E_c) : r^2 + 2r + 4 = 0$ dont le discriminant vaut $\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$. Les racines sont donc

$$r_1 = \frac{-2 + i\sqrt{12}}{2} = -1 + i\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad r_2 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Puisque le discriminant est strictement négatif, l'ensemble des solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est données par

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x}\left(A\cos\left(\sqrt{3}x\right) + B\sin\left(\sqrt{3}x\right)\right) \end{array} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

Ou encore

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x}\cos\left(\sqrt{3}x\right) \end{array}, \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x}\sin\left(\sqrt{3}x\right) \end{array} \right).}$$

3. Par la question précédente, on a obtenu les solutions de l'équation homogène. Il nous faut donc une solution « particulière ». Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $y_p : x \mapsto (ax+b)\,\mathrm{e}^x$. La fonction y_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & y_p'(x) = a\,\mathrm{e}^x + (ax+b)\,\mathrm{e}^x = (ax+a+b)\,\mathrm{e}^x \\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & y_p''(x) = (a+ax+a+b)\,\mathrm{e}^x = (ax+2a+b)\,\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Par suite, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lcl} y_p \text{ solution de } (E) & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 2y_p'(x) + 4y_p(x) = x\,\mathrm{e}^x \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ (ax + 2a + b)\,\mathrm{e}^x + 2\,(ax + a + b)\,\mathrm{e}^x + 4\,(ax + b)\,\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ ax + 2a + b + 2ax + 2a + 2b + 4ax + 4b = x \qquad \text{car } \mathrm{e}^x \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ 7ax + 4a + 7b = x. \end{array}$$

Pas d'identification ! On note alors qu'IL SUFFIT de prendre

$$\begin{cases} 7a = 1 \\ 4a + 7b = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a = 1/7 \\ b = -4a/7 = -4/49. \end{cases}$$

Ainsi, $y_p : x \mapsto \frac{7x-4}{49}\,\mathrm{e}^x$ est UNE solution de (E). Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = y_p + \mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x}\left(A\cos\left(\sqrt{3}x\right) + B\sin\left(\sqrt{3}x\right)\right) + \frac{7x-4}{49}\,\mathrm{e}^x \end{array} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

4. On observe que

$$(\mathscr{P}) : \qquad \begin{cases} (E)\ \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + 2f'(x) + 4f(x) = x\,\mathrm{e}^x \\ f(0) = \frac{4}{49} \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

est un problème de Cauchy et donc $\boxed{(\mathscr{P}) \text{ admet une unique solution}}$. Soit f cette unique solution. Par la question précédente, il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(A\cos\left(\sqrt{3}x\right) + B\sin\left(\sqrt{3}x\right)\right) + \frac{7x-4}{49}\,\mathrm{e}^x.$$

En particulier, $f(0) = A - \frac{4}{49}$. Or par hypothèse $f(0) = -\frac{4}{49}$. Donc $A - \frac{4}{49} = -\frac{4}{49}$ i.e. $A = 0$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \mathrm{e}^{-x}\,B\sin\left(\sqrt{3}x\right) + \frac{7x-4}{49}\,\mathrm{e}^x.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -\,\mathrm{e}^{-x}\,B\sin\left(\sqrt{3}x\right) + \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-x}\,B\cos\left(\sqrt{3}x\right) + \frac{7}{49}\,\mathrm{e}^x + \frac{7x-4}{49}\,\mathrm{e}^x.$$

En particulier,

$$f'(0) = 0 + \sqrt{3}B + \frac{7}{49} - \frac{4}{49} = B\sqrt{3} + \frac{3}{49}.$$

Or par hypothèse, $f'(0) = 0$ donc

$$0 = B\sqrt{3} + \frac{3}{49} \qquad \Leftrightarrow \qquad B = -\frac{3}{\sqrt{3}49} = -\frac{\sqrt{3}}{49}.$$

Conclusion, l'unique solution du problème de Cauchy est donné par

$$\boxed{f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{\sqrt{3}}{49}\,\mathrm{e}^{-x}\sin\left(\sqrt{3}x\right) + \frac{7x-4}{49}\,\mathrm{e}^x. \end{array}}$$

5. Soit
$$(F) \ : \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad t^2 z''(t) + 3tz'(t) + 4z(t) = 0.$$
Soient z une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons $x = \ln(t)$, plus précisément pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $y(x) = z\left(\mathrm{e}^x\right)$. Puisque la fonction exponentielle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit par composée que y est également deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,
$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}_+^*, &\qquad z(t) = y\left(\ln(t)\right)\\
\forall t \in \mathbb{R}_+^*, &\qquad z'(t) = \frac{1}{t} y'\left(\ln(t)\right)\\
\forall t \in \mathbb{R}_+^*, &\qquad z''(t) = -\frac{1}{t^2} y'\left(\ln(t)\right) + \frac{1}{t^2} y''\left(\ln(t)\right).
\end{aligned}$$
Dès lors, on a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
& z \text{ solution de } (F)\\
\Leftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t^2 z''(t) + 3tz'(t) + 4z(t) = 0\\
\Leftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t^2 \left(-\frac{1}{t^2} y'\left(\ln(t)\right) + \frac{1}{t^2} y''\left(\ln(t)\right)\right) + 3t \times \frac{1}{t} y'\left(\ln(t)\right) + 4y\left(\ln(t)\right) = 0\\
\Leftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ -y'\left(\ln(t)\right) + y''\left(\ln(t)\right) + 3y'\left(\ln(t)\right) + 4y\left(\ln(t)\right) = 0\\
\Leftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ y''\left(\ln(t)\right) + 2y'\left(\ln(t)\right) + 4y\left(\ln(t)\right) = 0.
\end{aligned}$$
Par le changement de variable $x = \ln(t)$, quand t parcourt $\mathbb{R}_+^*$, x parcourt bien $\mathbb{R}$ tout entier et donc :
$$\begin{aligned}
z \text{ solution de } (F) \quad & \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) + 2y'(x) + 4y(x) = 0\\
& \Leftrightarrow \quad y \text{ solution de } (E).
\end{aligned}$$
Par la question 3. on obtient donc que z est solution de (F) si et seulement si
$$\begin{aligned}
& \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(A\cos\left(\sqrt{3}x\right) + B\sin\left(\sqrt{3}x\right)\right) + \frac{7x-4}{49}\mathrm{e}^x\\
\Leftrightarrow\ & \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad z(t) = \mathrm{e}^{-\ln(t)}\left(A\cos\left(\sqrt{3}\ln(t)\right) + B\sin\left(\sqrt{3}\ln(t)\right)\right) + \frac{7\ln(t)-4}{49}\mathrm{e}^{\ln(t)}\\
\Leftrightarrow\ & \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad z(t) = \frac{1}{t}\left(A\cos\left(\sqrt{3}\ln(t)\right) + B\sin\left(\sqrt{3}\ln(t)\right)\right) + \frac{\left(7\ln(t)-4\right)t}{49}.
\end{aligned}$$
Conclusion, l'ensemble des solutions de (F) sont
$$\boxed{\mathscr{S}_F = \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{t}\left(A\cos\left(\sqrt{3}\ln(t)\right) + B\sin\left(\sqrt{3}\ln(t)\right)\right) + \frac{(7\ln(t)-4)t}{49}. \end{array} \ \middle|\ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Exercice III - Equation différentielle d'ordre 1

On considère l'équation différentielle suivante :
$$(E) \qquad \left(x^2 - 1\right) y'(x) + xy(x) = 1.$$

Partie 1 : L'équation (E) sur $]-1;1[$ et ses amies

1. On note que l'équation (E) n'est pas « résolue » en y'. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes :
$$x^2 - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1 \ \text{ OU } \ x = -1.$$

Posons $I_1 =]-\infty;-1[$, $I_2 =]-1;1[$ et $I_3 =]1;+\infty[$. Pour $I \in \{I_1, I_2, I_3\}$, on a

$$\forall x \in I, \qquad \left(x^2-1\right) y'(x) + xy(x) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + \frac{x}{x^2-1} y(x) = \frac{1}{x^2-1},$$

car $x^2 - 1 \neq 0$ sur I. On note que les fonctions $a : x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$ et $b : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ sont continues sur **l'intervalle** I. Conclusion,

$$\boxed{\text{Pour tout } I \in \{]-\infty;-1[\,,]-1;1[\,,]1;+\infty[\}, \text{ l'équation } (E) \text{ admet des solutions sur } I.}$$

2. Soit I l'un des intervalles de résolution i.e. $I =]-\infty;-1[$ ou $I =]-1;1[$ ou $I =]1;+\infty[$. Sur I, on a

$$(E_0) \ : \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + \frac{x}{x^2-1} y(x) = 0.$$

La fonction $a : x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$ est continue sur **l'intervalle** I donc admet des primitives sur cet intervalle dont l'une est donnée par

$$A : x \mapsto \frac{1}{2} \ln\left(\left|x^2-1\right|\right).$$

Donc les solutions de (E_0) sur I sont données par

$$\mathscr{S}_0(I) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln\left(\left|x^2-1\right|\right)} \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_0(I) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}} \end{pmatrix}.}$$

Ou encore

$$\boxed{\mathscr{S}_0(I) = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{C}{\sqrt{|x^2-1|}} \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

3. On applique la méthode de variation de la constante. Pour tout $x \in]-1;1[$, on pose

$$y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On pose également λ une fonction dérivable sur $]-1;1[$ et $\forall x \in]-1;1[$, $y(x) = \lambda(x) y_0(x)$. La fonction y est dérivable sur $]-1;1[$ et on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-1;1[\\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1;1[\,, \qquad y'(x) + \frac{x}{x^2-1} y(x) = \frac{1}{x^2-1} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1;1[\,, \qquad \lambda'(x) y_0(x) + \underbrace{\lambda(x) y_0'(x) + \frac{x}{x^2-1}\lambda(x) y_0(x)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_0(]-1;1[)} = \frac{1}{x^2-1} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1;1[\,, \qquad \lambda'(x) y_0(x) = \frac{1}{x^2-1} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1;1[\,, \qquad \lambda'(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{x^2-1} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1;1[\,, \qquad \lambda'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

On reconnaît alors la dérivée de la fonction arccos (ou $-\arcsin$ au choix) :

$$\begin{array}{ll} & y \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-1;1[\\ \Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1;1[, \qquad \lambda(x) = \arccos(x) + C \\ \Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1;1[, \qquad y(x) = \lambda(x) y_0(x) = \dfrac{\arccos(x)+C}{\sqrt{1-x^2}}. \end{array}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) sur $]-1;1[$ est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}\left(]-1;1[\right) = \left\{ \begin{array}{rcl}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\arccos(x)+C}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

4. Soit

$$\begin{array}{lll} (E_1) \ : & \forall x \in]-1;1[, & \left(x^2-1\right) y'(x) + x y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in]-1;1[, & y'(x) + \dfrac{x}{x^2-1} y(x) = -\dfrac{1}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} \qquad \text{car } 1-x^2>0. \end{array}$$

On observe que l'équation homogène associée à (E_1) est toujours (E_0). On procède donc à nouveau à la méthode de variation de la constante. Avec les mêmes notations de la question précédente, on a de la même façon,

$$\begin{array}{lll} & y \text{ solution de } (E_1) & \\ \Leftrightarrow & \forall x \in]-1;1[, & \lambda'(x) \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{1}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in]-1;1[, & \lambda'(x) = -\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}. \end{array}$$

On procède à une décomposition en éléments simples. *Méthode 1,* soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$

Alors,

$$a = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} (x-1) \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Et

$$b = \lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} (x+1) \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}.$$

Méthode 2, soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{lll} & \forall x \in]-1;1[, & \dfrac{1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in]-1;1[, & \dfrac{1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{(a+b)x+a-b}{(x-1)(x+1)}. \end{array}$$

On note alors qu'il suffit de prendre

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{2} & L_1 \leftarrow \frac{L_1+L_2}{2} \\ b = -\frac{1}{2} & L_2 \leftarrow \frac{L_1-L_2}{2} \end{cases}$$

Dans tous les cas, on observe que

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (E_1) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \left]-1;1\right[, \quad \lambda'(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \left]-1;1\right[, \quad \lambda'(x) = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \left]-1;1\right[, \quad \lambda(x) = \frac{1}{2}\ln(|x-1|) - \frac{1}{2}\ln(|x+1|) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + C \\
\Leftrightarrow \quad & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \left]-1;1\right[, \quad y(x) = \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + C\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

Conclusion, (quitte à poser $\tilde{C} = 2C$) les solutions de (E_1) sont

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} \left]-1;1\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(1-x)-\ln(1+x)+C}{2\sqrt{1-x^2}} \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

5. Posons

$$\begin{aligned}
(E_2) : \quad & \forall x \in \left]-1;1\right[, \quad \left(x^2-1\right) y'(x) + xy(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \left]-1;1\right[, \quad y'(x) + \frac{x}{x^2-1}y(x) = \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \qquad \text{car } 1-x^2 > 0.
\end{aligned}$$

Par le principe de superposition, on observe que si y est une solution de (E) et y_1 une solution de (E_2), alors $y + y_1$ est une solution de (E_2). Donc par ce qui précède,

$$y_2 : x \mapsto \frac{2\arccos(x) + \ln(1-x) - \ln(1+x)}{2\sqrt{1-x^2}}$$

est une solution de (E_2) sur $\left]-1;1\right[$. Or l'équation homogène associée à (E_2) est (E_0). Donc par la question 2., on en conclut directement l'ensemble des solutions de (E_2)

$$\boxed{\mathscr{S}_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} \left]-1;1\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2\arccos(x)+\ln(1-x)-\ln(1+x)+C}{2\sqrt{1-x^2}} \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Partie 2 : Intervention discrète mais remarquée de argch

Soit $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ est continue en } x \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{x^2-1} \neq 0 \\ x^2-1 \geqslant 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 > 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x < -1 \text{ OU } x > 1.
\end{aligned}$$

La fonction φ est donc continue sur $\left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$ et donc sur **l'intervalle** $\left]-\infty;-1\right[$ et sur **l'intervalle** $\left]1;+\infty\right[$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ admet des primitives sur l'intervalle } \left]-\infty;-1\right[\text{ et sur 'lintervalle } \left]1;+\infty\right[.}$$

7. Soit $x > 1$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} x - \sqrt{x^2-1} < 1 & \Leftrightarrow & x - 1 < \sqrt{x^2-1} \\ & \Leftrightarrow & (x-1)^2 < x^2 - 1 \end{array}$$

par la stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ et le fait que $x - 1 \geqslant 0$ et $x^2 - 1 \geqslant 0$

$$\begin{array}{rcl} & \Leftrightarrow & x^2 - 2x + 1 < x^2 - 1 \\ & \Leftrightarrow & 2 < 2x \\ & \Leftrightarrow & x > 1 \text{vrai par hypothèse.} \end{array}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x > 1, \qquad x - \sqrt{x^2-1} < 1.}$$

8. Soient $x > 1$ et $a > 0$. On a

$$x = \operatorname{ch}(a) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a}}{2}.$$

Posons $X = \mathrm{e}^a$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcll} x = \operatorname{ch}(a) & \Leftrightarrow & x = \dfrac{X + \frac{1}{X}}{2} & \\ & \Leftrightarrow & 2xX = X^2 + 1 & \text{car } X = \mathrm{e}^a > 0 \\ & \Leftrightarrow & X^2 - 2xX + 1 = 0. & \end{array}$$

Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta = 4x^2 - 4 = 4\left(x^2 - 1\right)$. Or $x > 1$ donc $x^2 - 1 > 0$ et $\Delta > 0$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} x = \operatorname{ch}(a) & \Leftrightarrow & X = \dfrac{2x - \sqrt{4\left(x^2-1\right)}}{2} \text{ OU } X = \dfrac{2x + \sqrt{4\left(x^2-1\right)}}{2} \\ & \Leftrightarrow & X = x - \sqrt{x^2-1} \text{ OU } X = x + \sqrt{x^2-1}. \end{array}$$

On note que $x^2 - 1 < x^2$ donc par la stricte croissance de la fonction carrée, $\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} = x$ car $x > 1$. Ainsi, $x - \sqrt{x^2-1} > 0$ et on a également $x + \sqrt{x^2-1} > 0$. Par suite,

$$\begin{array}{rcl} x = \operatorname{ch}(a) & \Leftrightarrow & \mathrm{e}^a = x - \sqrt{x^2-1} \text{ OU } \mathrm{e}^a = x + \sqrt{x^2-1} \\ & \Leftrightarrow & a = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) \text{ OU } a = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right). \end{array}$$

Cependant par la question précédente, on sait que puisque $x > 1$, alors, $x - \sqrt{x^2-1} < 1$. Donc par la stricte croissance du logarithme, $\ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) < 0$. Or on cherche $a > 0$. Ainsi, $\ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$ n'est pas une solution. Cependant, $x > 1$ donc $x^2 > 1$ et $\sqrt{x^2-1} > 0$. Donc $x + \sqrt{x^2-1} > 1$ et finalement, $\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) > 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall (a, x) \in \mathbb{R}_+^* \times]1; +\infty[, \qquad \left(x = \operatorname{ch}(a) \ \Leftrightarrow\ a = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right).}$$

La restriction fonction ch *sur* $\mathbb{R}_+$ *étant strictement croissante et continue sur* $\mathbb{R}_+$ *admet par le théorème de la bijection une réciproque, notée* argch *de* $[1; +\infty[$ *dans* $\mathbb{R}_+$*. L'équivalence que nous venons d'établir redémontre directement la bijectivité de la restriction de la fonction* ch *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et donne de plus une expression explicite de* argch *:* $\forall x > 1$, $\operatorname{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$*. Formule que l'on peut prolonger en* 1 *sans souci.*

9. On a vu que φ est continue sur $]1; +\infty[$ donc admet des primitives sur cet intervalle dont l'une est donnée par le théorème fondamentale de l'analyse par

$$F : \begin{array}{rcl}]1; +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_2^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

Soit $x > 1$. On a

$$F(x) = \int_2^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $u > 0$ on pose $t = \mathrm{ch}(u)$. La fonction ch est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{d}t = \mathrm{sh}(u)\,\mathrm{d}u$. De plus, par la question précédente, on a $x = \mathrm{ch}(a) \quad\Leftrightarrow\quad a = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$. Donc quand $t = x$ alors $u = a = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$. De même quand $t = 2$, on a $u = \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$. Dès lors, on obtient,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}^{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(u)-1}}\,\mathrm{sh}(u)\,\mathrm{d}u\\
&= \int_{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}^{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} \frac{\mathrm{sh}(u)}{\sqrt{\mathrm{sh}^2(u)}}\,\mathrm{d}u\\
&= \int_{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}^{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} \frac{\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{sh}(u)}\,\mathrm{d}u \qquad \text{car pour tout } u \geqslant \ln\left(2+\sqrt{3}\right) > 0,\ \mathrm{sh}(u) > 0\\
&= \int_{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}^{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} 1\,\mathrm{d}u\\
&= \left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right).
\end{aligned}$$

Donc $x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ est une primitive de φ sur $]1;+\infty[$. Conclusion, l'ensemble des primitives de φ sur $]1;+\infty[$ est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

On admet dans la suite que $x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ est une primitive de φ sur $]1;+\infty[$.

Partie 3 : Symétrie avouée, équation à moitié résolue.

10. Comme dans la question 3. on applique la méthode de variation de la constante. Pour tout $x \in]1;+\infty[$, on pose

$$y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Par la question 2. la fonction y_0 est une solution de (E_0) sur $]1;+\infty[$. Soit λ une fonction dérivable sur $]1;+\infty[$ et $\forall x \in]1;+\infty[$, $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$. La fonction y est dérivable sur $]1;+\infty[$ et de la même façon que dans la question 2. on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (E) \text{ sur }]1;+\infty[\\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in]1;+\infty[, \qquad y'(x) + \frac{x}{x^2-1}y(x) = \frac{1}{x^2-1}\\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in]-1;1[, \qquad \lambda'(x)y_0(x) + \underbrace{\lambda(x)y_0'(x) + \frac{x}{x^2-1}\lambda(x)y_0(x)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_0(]-1;1[)} = \frac{1}{x^2-1}\\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in]1;+\infty[, \qquad \lambda'(x)y_0(x) = \frac{1}{x^2-1}\\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in]1;+\infty[, \qquad \lambda'(x)\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x^2-1}\\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in]1;+\infty[, \qquad \lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \varphi(x).
\end{aligned}$$

Par la question précédente, on obtient alors

$$\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (E) \text{ sur }]1;+\infty[\\
\Leftrightarrow \quad & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in]1;+\infty[\,, \qquad \lambda(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C \\
\Leftrightarrow \quad & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in]1;+\infty[\,, \qquad y(x) = \lambda(x) y_0(x) = \frac{\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) sur $]1;+\infty[$ est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}\left(]1;+\infty[\right) = \left\{ \begin{array}{rcl}]1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C}{\sqrt{x^2-1}} \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}}.$$

11. Soit y une fonction dérivable sur $]1;+\infty[$. On pose $z : x \mapsto -y(-x)$.
Pour tout $x \in]-\infty;-1[$, $-x \in]1;+\infty[$ donc $y(-x)$ et z est bien définie sur $]-\infty;-1[$. De plus, puisque que y est dérivable sur $]1;+\infty[$ et que $\begin{array}{rcl}]-\infty;-1[& \to &]1;+\infty[\\ x & \mapsto & -x \end{array}$ est dérivable, on en déduit que $\boxed{z \text{ est dérivable sur }]-\infty;-1[}$. De plus, pour tout $x \in]-\infty;-1[$, $z'(x) = -(-1)\,y'(-x) = y'(-x)$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
z \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-\infty;-1[\quad & \Leftrightarrow \quad \forall x\,]-\infty;-1[\,, \qquad \left(x^2-1\right) z'(x) + xz(x) = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \forall x\,]-\infty;-1[\,, \qquad \left(x^2-1\right) y'(-x) - xy(-x) = 1.
\end{aligned}$$

Posons pour tout $x \in]-\infty;-1[$, $t = -x$. Quand x décrit $]-\infty;-1[$, alors t décrit $]1;+\infty[$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
z \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-\infty;-1[\quad & \Leftrightarrow \quad \forall t \in]1;+\infty[\,, \qquad \left((-t)^2-1\right) y'(t) + ty(t) = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \forall t \in]1;+\infty[\,, \qquad \left(t^2-1\right) y'(t) + ty(t) = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad y \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-\infty;-1[.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{z \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-\infty;-1[\qquad \Leftrightarrow \qquad y \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]1;+\infty[.}$$

12. Soit $\mathscr{S}\left(]-\infty;-1[\right)$ l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty;-1[$. Avec les notations de la question précédente, on a

$$z \in \mathscr{S}\left(]-\infty;-1[\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad y \in \mathscr{S}\left(]1;+\infty[\right).$$

Donc par la question 10.

$$\begin{aligned}
z \in \mathscr{S}\left(]-\infty;-1[\right) \ & \Leftrightarrow \ \exists C \in \mathbb{R},\ \forall t \in]1;+\infty[\,, \qquad y(t) = \frac{\ln\left(t + \sqrt{t^2-1}\right) + C}{\sqrt{t^2-1}} \\
& \Leftrightarrow \ \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-\infty;-1[\,, \qquad z(x) = -y(-x) = -\frac{\ln\left(-x + \sqrt{x^2-1}\right) + C}{\sqrt{x^2-1}}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}\left(]1;+\infty[\right) = \left\{ \begin{array}{rcl}]-\infty;-1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{\ln\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)+C}{\sqrt{x^2-1}} \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}}.$$