Devoir Maison 5
Matrices, analyse asymptotique

A faire pour le jeudi 05 janvier

Exercice I - Calcul matriciel

Dans ce problème, on considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de ce problème est de calculer les puissances de la matrice A de plusieurs façons différentes.

Partie 1 : Newton ouvre le jeu en travaillant en binôme

On considère

$$J = \frac{1}{4}(A + 3I_3)$$

1. Calculer J^2.
2. En déduire J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que :

$$(\bigstar) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n) J$$

4. En déduire A^n en fonction de ses coefficients pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que la formule $(\bigstar)$ reste valable pour $n = -1$.
6. Montrer que la formule $(\bigstar)$ reste valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Partie 2 : Euclide reprend l'avantage en divisant l'équipe adverse

7. Calculer $A^2 + 2A$, puis en déduire un polynôme annulateur $P(X)$ de la matrice A de degré 2.
8. En déduire à nouveau que A est inversible et que son inverse est un polynôme en A.
9. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
10. En déduire A^n en fonction de ses coefficients pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie 3 : Gauss se pose en pivot du match

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\mathcal{S}_\lambda)$ l'équation suivante d'inconnue $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}_\lambda) \ : \ (\lambda I_3 - A) X = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

On note $\mathscr{S}_\lambda$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S}_\lambda)$.

11. Déterminer suivant les valeurs de λ, l'ensemble $\mathscr{S}_\lambda$.

12. On note λ_1 et λ_2, $\lambda_1 < \lambda_2$ les deux réels pour lesquels $\mathscr{S}_\lambda \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Vérifier que $\lambda_1 + 2\,\lambda_2 = \text{Tr}\,(A)$.

13. On pose $e_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Pour tout $i \in [\![1;3]\!]$, calculer Ae_i et en déduire que $e_i \in \mathscr{S}_{\lambda_1}$ ou $e_i \in \mathscr{S}_{\lambda_2}$.

Partie 4 : Un but en diagonale conclut la rencontre

On considère la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

14. On admet dans cette question que P est inversible.
    Montrer, sans calculer P^{-1}, que $\text{Tr}\left(P^{-1}AP\right) = \text{Tr}\,(A)$.

15. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

16. Calculer $D = P^{-1}AP$. Préciser $\text{Tr}\,(D)$, est-ce cohérent ?

17. Exprimer A^n en fonction de P, P^{-1} et D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

18. Le résultat précédent reste-t-il vrai pour $n = -1 \in \mathbb{Z}$?

19. En déduire A^n en fonction de ses coefficients pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice II - Analyse asymptotique

Le but de ce problème n'est pas de donner une, ni deux, ni trois, ni quatre mais cinq méthodes pour déterminer le développement limité de la fonction tangente en 0 !

Préliminaires

1. Justifier l'existence d'un développement à l'ordre 5 en 0 de la fonction tangente.

Soient $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5$ les coefficients du développement limité de la fonction tangente i.e.

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o\left(x^5\right).$$

2. Justifier que certains coefficients sont nuls.

3. En utilisant l'équivalent usuel de la fonction tangente, déterminer proprement a_1.

On admet dans toute la suite que

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o\left(x^5\right),$$

et l'on cherche à retrouver les valeurs de a_1, a_3, a_5.

Méthode 1 : Taylor est une brute

4. Exprimer pour chaque $k \in [\![1;5]\!]$, $\tan^{(k)}$ sous la forme $P_k \circ \tan$ où P_k est un polynôme que l'on précisera.

5. En déduire le développement limité de la fonction arctan en 0 à l'ordre 5.

Méthode 2 : avec la réciproque, c'est sans équivoque

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Déterminer un développement limité à l'ordre $2n$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ en 0.
   (b) Déterminer un développement limité à l'ordre $2n+1$ de la fonction arctan en 0.
   (c) Préciser alors le développement limité de la fonction arctan en 0 à l'ordre 5.

7. Déterminer le développement limité de la fonction $\tan(\arctan(x))$ quand $x \to 0$ en fonction de a_1, a_3 et a_5.

8. Sur quel ensemble a-t-on $\tan(\arctan(x)) = x$?

9. En déduire les valeurs de a_1, a_3 et a_5 et exprimer le développement limité de la fonction tangente en 0 à l'ordre 5.

Méthode 3 : quand sinus et cosinus prennent la tangente

10. Exprimer le développement limité en 0 de $x \mapsto \sin(x)$ et de $x \mapsto \cos(x)$ à l'ordre 5.

11. En déduire à nouveau le développement limité de la fonction tangente en 0 à l'ordre 5.

Méthode 4 : laissons-nous dériver petit à petit

12. A l'aide de la question 3., déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto 1 + \tan^2(x)$ en 0.

13. En déduire un développement limité d'ordre 3 de tangente en 0.

14. En réappliquant la même méthode, déterminer à nouveau le développement limité de la fonction tangente en 0 à l'ordre 5.

Une petite dernière pour la route !

15. Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$.

16. En déduire une dernière fois le développement limité de la fonction tangente en 0 à l'ordre 5.

Exercice III - Bonus !

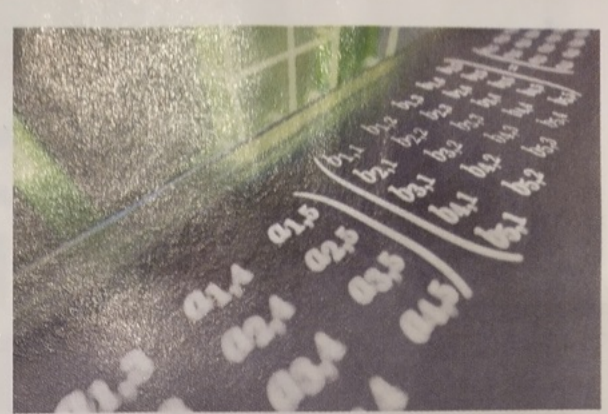
Voici un extrait de *Pour La Science* de décembre 2022 qui résume un article de A. Fawzi et al paru dans *Nature* en 2022.

MATHÉMATIQUES

UNE MULTIPLICATION AMÉLIORÉE

Les matrices sont une généralisation de la notion de nombre. Ces objets sont des sortes de tableaux dont les lignes et colonnes sont remplies de nombres. Comme pour les nombres classiques, il est possible d'additionner, soustraire ou encore multiplier deux matrices. Pour cette dernière opération, il faut réaliser une séquence de multiplications et d'additions. Comme les multiplications de nombres sont des opérations qui demandent plus de ressources de calcul que les additions, on estime la performance d'un algorithme de multiplication de matrices en comptant le nombre de multiplications nécessaires. Pour le cas de deux matrices carrées de dimension n (avec n lignes et n colonnes), la définition standard du produit conduit à un total de n^3 multiplications.

Or, en 1969, le mathématicien Volker Strassen a montré qu'il était possible de réaliser la multiplication de deux matrices de dimension 2 avec seulement sept multiplications au lieu de huit (2^3). Pour cela, il a combiné de façon astucieuse les termes des matrices initiales. Mais de telles ruses sont difficiles à trouver. Pour en découvrir de nouvelles, DeepMind, une filiale de Google spécialiste de l'intelligence artificielle, a utilisé un algorithme d'apprentissage profond nommé AlphaTensor. Le résultat est impressionnant. Très rapidement, AlphaTensor a retrouvé tous les algorithmes qui avaient été déjà identifiés par des humains. Mais dans certains cas, il a trouvé plus efficace ! Par exemple, pour le produit d'une matrice 4×5 par une matrice 5×5, le nombre de multiplications passe de 80 à 76. De quoi optimiser des programmes et des simulations gourmandes en ressources. Une question subsiste : peut-on faire encore mieux ? ■



Grâce à l'intelligence artificielle, les algorithmes de multiplication de matrices ont été améliorés, surpassant parfois des astuces découvertes il y a près de cinquante ans.

S. B.

A. Fawzi *et al.*, *Nature*, 2022

1. Expliquer pourquoi la multiplication matricielle de deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ demande n^3 multiplications de réels.

2. Soient $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$. On pose

$$m_1 = (a_{1,1} + a_{2,2})(b_{1,1} + b_{2,2}), \qquad m_2 = (a_{2,1} + a_{2,2})\,b_{1,1}, \qquad m_3 = a_{1,1}(b_{1,2} - b_{2,2})$$
$$m_4 = a_{2,2}(b_{2,1} - b_{1,1}), \qquad m_5 = (a_{1,1} + a_{1,2})\,b_{2,2}, \qquad m_6 = (a_{2,1} - a_{1,1})(b_{1,1} + b_{1,2})$$
$$m_7 = (a_{1,2} - a_{2,2})(b_{2,1} + b_{2,2})$$

Retrouver la méthode du mathématicien allemand Volker STRASSEN en dimension 2×2 en montrant que chaque coefficient $c_{i,j}$ de la matrice $C = AB$ peut s'écrire en fonction des sept nombres m_k.