Correction du Devoir Maison 5
Matrices et analyse asymptotique

Du jeudi 05 décembre

Exercice I - Calcul matriciel

Dans ce problème, on considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de ce problème est de calculer les puissances de la matrice A de plusieurs façons différentes.

Partie 1 : Newton ouvre le jeu en travaillant en binôme

On considère

$$J = \frac{1}{4}(A + 3I_3)$$

1. Par définition,

$$J = \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{J^2 = J.}$$

2. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$: « $J^k = J$ ». Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $k = 1$, alors $J^1 = J$ et donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie et montrons alors que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned} J^{k+1} = J^k J = JJ &= J^2 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= J && \text{d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie et donc

$$\boxed{J^k = \begin{cases} J & \text{si } k \geqslant 1 \\ I_3 & \text{si } k = 0. \end{cases}}$$

3. On a $A = 4J - 3I_3$. De plus J et I_3 COMMUTENT. Donc par la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
A^n = (4J - 3I_3)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (4J)^k (-3I_3)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J^k \\
&= (-3)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J \qquad \text{par ce qui précède et car } n \geqslant 1 \\
&= (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} - (-3)^n \right) J \\
&= (-3)^n I_3 + ((4-3)^n - (-3)^n) J \\
&= (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n) J
\end{aligned}$$

On note que cette formule reste encore vraie si $n = 0$. Conclusion,

$$(\bigstar) \qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n)\, J.}$$

4. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a directement

$$A^n = (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n) J = (-3)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - (-3)^n) \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 2(-3)^n - 1 & 0 & 2(-3)^n - 2 \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}.}$$

On contrôle son résultat pour $n = 0$ ou $n = 1$.

5. Si $n = -1$, posons

$$B = (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n) J = -\frac{1}{3} I_3 + \left(1 + \frac{1}{3}\right) J = \frac{4}{3} J - \frac{1}{3} I_3.$$

On observe que

$$\begin{aligned}
AB &= (4J - 3I_3) \left(\frac{4}{3} J - \frac{1}{3} I_3 \right) \\
&= \frac{16}{3} J^2 - \frac{4}{3} J - 4J + I_3 \\
&= \frac{16}{3} J - \frac{16}{3} J + I_3 \qquad \text{d'après la question 1} \\
&= I_3.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que A est inversible. De plus,

$$A^{-1} = B = \frac{4}{3} J - \frac{1}{3} I_3 = (-3)^{-1} I_3 + \left(1 - (-3)^{-1}\right) J.$$

Conclusion,

$$\boxed{(\bigstar) \text{ reste valable pour } n = -1.}$$

6. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Méthode 1. Posons

$$B_p = (-3)^{-p} I_3 + \left(1 - (-3)^{-p}\right) J = \frac{1}{(-3)^p} I_3 + \left(1 - \frac{1}{(-3)^p}\right) J.$$

Alors, par la question 3. on a

$$\begin{aligned} A^p B_p &= \left((-3)^p I_3 + (1 - (-3)^p) J\right) \left(\frac{1}{(-3)^p} I_3 + \left(1 - \frac{1}{(-3)^p}\right) J\right) \\ &= I_3 + \left((-3)^p - 1\right) J + \left(\frac{1}{(-3)^p} - 1\right) J + \left(1 - \frac{1}{(-3)^p} - (-3)^p + 1\right) J^2 \\ &= I_3 + \left((-3)^p + \frac{1}{(-3)^p} - 2\right) J + \left(2 - \frac{1}{(-3)^p} - (-3)^p\right) J^2 \qquad \text{d'après la question 1, } J^2 = J \\ &= I_3. \end{aligned}$$

Donc A^p est inversible et $A^{-p} = B_p = \frac{1}{(-3)^p} I_3 + \left(1 - \frac{1}{(-3)^p}\right) J$. Donc ($\bigstar$) est encore vrai pour tout $n = -p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Conclusion,

$$\boxed{(\bigstar) \text{ reste valable pour tout } n \in \mathbb{Z}.}$$

Méthode 2. D'après la question précédente et la formule du binôme de Newton, applicable car I_3 et J COMMUTENT, on a

$$\begin{aligned} A^{-p} &= \left(A^{-1}\right)^p \\ &= \left(\frac{4}{3} J - \frac{1}{3} I_3\right)^p \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left(\frac{4}{3} J\right)^k \left(-\frac{1}{3} I_3\right)^{p-k} \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)^p I_3 + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \frac{4^k (-1)^{p-k}}{3^p} J \qquad \text{d'après la question 2} \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)^p I_3 + \frac{(4-1)^p - (-1)^p}{3^p} J \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)^p I_3 + \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^p\right) J \\ &= (-3)^{-p} I_3 + \left(1 - (-3)^{-p}\right) J. \end{aligned}$$

Ainsi ($\bigstar$) est encore vrai pour tout $n = -p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Conclusion,

$$\boxed{(\bigstar) \text{ reste valable pour tout } n \in \mathbb{Z}.}$$

Partie 2 : Euclide reprend l'avantage en divisant l'équipe adverse

7. On a les égalités entre matrices suivantes :

$$\begin{aligned} A^2 + 2A &= \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 17 & 0 & 16 \\ -8 & 1 & -8 \\ -8 & 0 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 & 0 & -16 \\ 8 & 2 & 8 \\ 8 & 0 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{A^2 + 2A = 3I_3}$. En posant $\boxed{P(X) = X^2 + 2X - 3}$, on observe bien que $P(X)$ est $\boxed{\text{un polynôme annulateur de } A}$: $P(A) = 0_3$.

8. Par la question précédente, $A(A + 2I_3) = 3I_3$ i.e. $A\left[\frac{1}{3}(A + 2I_3)\right] = I_3$. Donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$ et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I_3) = P_1(A), \qquad \text{avec} \qquad P_1(X) = \frac{1}{3}(X + 2).}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la division euclidienne pour les polynômes, il existe Q et R deux polynômes tels que

$$X^n = Q(X)P(X) + R(X),$$

avec R un polynôme de degré au plus 1 : il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R(X) = aX + b$:

$$X^n = Q(X)P(X) + aX + b.$$

On note que 1 et -3 sont les deux racines de P (faire un discriminant si besoin) : $P(1) = P(-3) = 0$. Donc en évaluant l'égalité précédente en 1 et en -3, on a

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 1^n = Q(1) \times 0 + a + b \\ (-3)^n = Q(-3) \times 0 - 3a + b \end{cases} \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} 1 = a + b \\ (-3)^n = -3a + b \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} b = 1 - a \\ (-3)^n = -3a + 1 - a = 1 - 4a \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} b = \frac{3+(-3)^n}{4} \\ a = \frac{1-(-3)^n}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$ est

$$\boxed{R(X) = \frac{1 - (-3)^n}{4} X + \frac{3 + (-3)^n}{4}.}$$

10. D'après les questions précédentes, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
A^n = Q(A) \underbrace{P(A)}_{=0_3} + R(A) &= \frac{1 - (-3)^n}{4} A + \frac{3 + (-3)^n}{4} I_3 \\
&= \frac{1 - (-3)^n}{4} \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \frac{3 + (-3)^n}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} -1 + 2(-3)^n & 0 & -2 + 2(-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}.}$$

On retrouve bien le résultat de la question 4.

Partie 3 : Gauss se pose en pivot du match

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\mathcal{S}_\lambda)$ l'équation suivante d'inconnue $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}_\lambda) \ : \ (\lambda I_3 - A) X = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

On note $\mathscr{S}_\lambda$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S}_\alpha)$.

11. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_\lambda) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda+7 & 0 & 8 \\ -4 & \lambda-1 & -4 \\ -4 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} (\lambda+7)\,x + 8z \\ -4x + (\lambda-1)\,y - 4z \\ -4x + (\lambda-5)\,z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (\lambda+7)\,x + 8z = 0 \\ -4x + (\lambda-1)\,y - 4z = 0 \\ -4x + (\lambda-5)\,z = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

On applique alors naturellement le pivot de Gauss en gardant en tête que x, y et z sont nos inconnues tandis que λ est un paramètre fixé. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_\lambda) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x + (\lambda-5)\,z = 0 \\ -4x + (\lambda-1)\,y - 4z = 0 \\ (\lambda+7)\,x + 8z = 0 \end{cases} && L_1 \leftrightarrow L_3 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x + (\lambda-5)\,z = 0 \\ (\lambda-1)\,y + (-4-\lambda+5)\,z = 0 \\ \left(8 + \frac{(\lambda+7)(\lambda-5)}{4}\right) z = 0 \end{cases} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{\lambda+7}{4} L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x + (\lambda-5)\,z = 0 \\ (\lambda-1)\,y + (1-\lambda)\,z = 0 \\ \frac{32+\lambda^2+2\lambda-35}{4} z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x + (\lambda-5)\,z = 0 \\ (\lambda-1)\,y + (1-\lambda)\,z = 0 \\ \left(\lambda^2+2\lambda-3\right) z = 0 \end{cases} && L_3 \leftarrow 4L_3 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x + (\lambda-5)\,z = 0 \\ (\lambda-1)\,y + (1-\lambda)\,z = 0 \\ (\lambda-1)\,(\lambda+3)\,z = 0 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Premier cas, supposons $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_\lambda) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x + (\lambda-5)\,z = 0 \\ (\lambda-1)\,y + (1-\lambda)\,z = 0 \\ z = 0 \end{cases} && L_3 \leftarrow \frac{1}{(\lambda-1)(\lambda+3)} L_3 \quad \text{car } (\lambda-1)\,(\lambda+3) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x = 0 \\ (\lambda-1)\,y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x = y = z = 0 \qquad \text{car } \lambda-1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Dans ce cas,

$$\mathscr{S}_\lambda = \{0_{\mathbb{R}^3}\} .$$

Deuxième cas, $\lambda = 1$. Dans ce cas,

$$(\mathcal{S}_1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x - 4z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad z = -x.$$

Dans ce cas,

$$\mathscr{S}_1 = \left\{ (x, y, -x) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Troisième cas, $\lambda = -3$. Dans ce cas,

$$(\mathcal{S}_{-3}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x - 8z = 0 \\ -4y + 4z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases}.$$

Dans ce cas, on obtient,

$$\mathscr{S}_{-3} = \left\{ (-2z, z, z) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_\lambda = \begin{cases} \{0_{\mathbb{R}^3}\} & \text{si } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\} \\ \left\{ (x, y, -x) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} & \text{si } \lambda = 1 \\ \left\{ (-2z, z, z) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} & \text{si } \lambda = -3 \end{cases}.}$$

12. Par la question précédente, on a $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 1$. Donc on a d'une part, $\lambda_1 + 2\,\lambda_2 = -3 + 2 \times 1 = -1$. D'autre part, $\mathrm{Tr}\,(A) = -7 + 1 + 5 = -1$. Conclusion, on a bien,

$$\boxed{\lambda_1 + 2\,\lambda_2 = \mathrm{Tr}\,(A).}$$

On dit que λ_1 et λ_2 sont des valeurs propres de A. Puisque $\mathscr{S}_1$ est un plan, donc de dimension 2 et $\mathscr{S}_{-3}$ une droite, de dimension 1, ce résultat sur la somme pondérée par les dimensions valant la trace de la matrice est un résultat plus général que vous verrez en seconde année.

13. On pose $e_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. On a les égalités entre vecteurs suivants :

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -3e_1.$$

Donc $(3I_3 - A)\,e_1 = 0$ i.e. $e_1 \in \mathscr{S}_{-3}$. De même,

$$Ae_2 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_2 \qquad \text{et} \qquad Ae_3 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = e_3$$

Donc $e_2 \in \mathscr{S}_1$ et $e_3 \in \mathscr{S}_1$. Conclusion,

$$\boxed{Ae_1 = -3e_1,\ Ae_2 = e_2,\ Ae_3 = e_3 \qquad \text{i.e.} \qquad e_1 \in \mathscr{S}_{-3},\ (e_2, e_3) \in \mathscr{S}_1^2.}$$

Partie 4 : Un but en diagonale conclut la rencontre

On considère la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

14. On admet dans cette question que P est inversible. On sait d'après le cours que $\operatorname{Tr}(UV) = \operatorname{Tr}(VU)$ *(mais n'est pas égal à $\operatorname{Tr}(U)\operatorname{Tr}(V)$ en général).* Dès lors, en prenant $U = P^{-1}$ et $V = AP$, on obtient

$$\operatorname{Tr}\left(P^{-1}AP\right) = \operatorname{Tr}\left(APP^{-1}\right) = \operatorname{Tr}(AI_3) = \operatorname{Tr}(A).$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Tr}\left(P^{-1}AP\right) = \operatorname{Tr}(A).}$$

15. On a les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned}
P = & \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_2 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftrightarrow L_3 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_2 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} & L_2 \leftrightarrow L_3 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}
\end{aligned}$$

N'oubliez pas de vérifier votre résultat.

On a donc montré que $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, donc $\boxed{P \text{ est inversible}}$ de plus, on a

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.}$$

16. On a
$$P^{-1}AP = P^{-1}\begin{pmatrix}-7 & 0 & -8\\ 4 & 1 & 4\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 0\\ -3 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$
Conclusion, on obtient
$$\boxed{D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.}$$
On retrouve les valeurs propres λ_1 et λ_2...
De plus,
$$\boxed{\operatorname{Tr}(D) = -3+1+1 = -1 = \operatorname{Tr}(A),}$$
ce qui est bien cohérent avec la question 14.

17. En multipliant à droite par P^{-1} et à gauche par P, on sait alors également que $A = PDP^{-1}$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ ». Procédons par récurrence.
Initialisation. Si $n = 0$, on a $PD^nP^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3 = A^0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. On a
$$\begin{aligned}A^{n+1} = A^nA &= PD^nP^{-1}A && \text{par hypothèse de récurrence}\\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1}\\ &= PD^nDP^{-1}\\ &= PD^{n+1}P^{-1}.\end{aligned}$$
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\boxed{A^n = PD^nP^{-1}.}$$

18. On a $A = PDP^{-1}$. Or D est une matrice diagonale avec des coefficients diagonaux non nuls donc D est inversible et
$$D^{-1} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$
Donc A est le produit de trois matrices inversibles. Donc A est inversible et
$$A^{-1} = \left(PDP^{-1}\right)^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}.$$
Conclusion, $\boxed{\text{le résultat est encore vrai pour } n = -1}$.

19. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $D^n = \begin{pmatrix}(-3)^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, on a
$$A^n = P\begin{pmatrix}(-3)^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-(-3)^n & 0 & -(-3)^n\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$
On retrouve à nouveau le résultat précédent :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix}2(-3)^n - 1 & 0 & 2(-3)^n - 2\\ 1-(-3)^n & 1 & 1-(-3)^n\\ 1-(-3)^n & 0 & 2-(-3)^n\end{pmatrix}.}$$

Exercice II - S'entrainer

Le but de ce problème n'est pas de donner une, ni deux, ni trois, ni quatre mais cinq méthodes pour déterminer le développement limité de la fonction tangente en 0 !

Préliminaires

1. La fonction tangente est $\mathscr{C}^\infty$ en 0 et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction tangente est $\mathscr{C}^n$ en 0 et d'après le cours admet donc un développement limité à l'ordre n en 0. En particulier pour $n = 5$,

$$\boxed{\text{la fonction tangente est } \mathscr{C}^5 \text{ donc admet un développement limité à l'ordre 5 en 0.}}$$

Soient $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5$ les coefficients du développement limité de la fonction tangente i.e.

$$\tan(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o\left(x^5\right).$$

2. On sait que la fonction tangente est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$. Donc d'après le cours, on sait que **en** 0 *(très important)* son développement limité n'admet que des monômes de degré impair. Par conséquent,

$$\boxed{a_0 = a_2 = a_4 = 0.}$$

   On obtient alors

$$\tan(x) \underset{x \to 0}{=} a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o\left(x^5\right).$$

3. On sait que $\tan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ i.e. $\tan(x) \underset{x \to 0}{=} x + o(x)$. Or par troncature du développement précédent, on a

$$\tan(x) \underset{x \to 0}{=} a_1 x + o(x).$$

   Donc par unicité du développement limité,

$$\boxed{a_1 = 1.}$$

On admet dans toute la suite que

$$\tan(x) \underset{x \to 0}{=} a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o\left(x^5\right),$$

et l'on cherche à retrouver les valeurs de a_1, a_3, a_5.

Méthode 1 : Taylor est une brute

4. La fonction tan est cinq fois dérivable sur $U = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. De plus sur U, on a

$$\tan' = 1 + \tan^2.$$

   Donc en posant $P_1 = X^2 + 1$, on a bien $\tan^{(1)} = P_1(\tan)$. Puis,

$$\begin{aligned}
\tan'' &= 2\tan'\tan = 2\left(1 + \tan^2\right)\tan = 2\tan^3 + 2\tan \\
\tan^{(3)} &= \tan'\left(6\tan^2 + 2\right) = \left(\tan^2 + 1\right)\left(6\tan^2 + 2\right) = 6\tan^4 + 6\tan^2 + 2\tan^2 + 2 = 6\tan^4 + 8\tan^2 + 2 \\
\tan^{(4)} &= \tan'\left(24\tan^3 + 16\tan\right) \\
&= \left(\tan^2 + 1\right)\left(24\tan^3 + 16\tan\right) \\
&= 24\tan^5 + 16\tan^3 + 24\tan^3 + 16\tan \\
&= 24\tan^5 + 40\tan^3 + 16\tan \\
\tan^{(5)} &= \tan'\left(120\tan^4 + 120\tan^2 + 16\right) \\
&= \left(\tan^2 + 1\right)\left(120\tan^4 + 120\tan^2 + 16\right) \\
&= 120\tan^6 + 120\tan^4 + 16\tan^2 + 120\tan^4 + 120\tan^2 + 16 \\
&= 120\tan^6 + 240\tan^4 + 136\tan^2 + 16.
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant

$$\boxed{P_1 = X^2 + 1, \qquad P_2 = 2X^3 + 2X, \qquad P_3 = 6X^4 + 8X^2 + 2}$$

et

$$\boxed{P_4 = 24X^5 + 40X^3 + 16X, \qquad P_5 = 120X^6 + 240X^4 + 136X^2 + 16,}$$

on a bien

$$\boxed{\forall k \in [\![1;5]\!], \qquad \tan^{(k)} = P_k \circ \tan.}$$

5. Puisque $0 \in U = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, on évalue les relations précédentes en 0. On a $\tan(0) = 0$. Donc pour tout $k \in [\![1;5]\!]$, $\tan^{(k)}(0) = P_k(\tan(0)) = P_k(0)$. Ainsi,

$$\tan'(0) = 1, \qquad \tan^{(2)}(0) = 0, \qquad \tan^{(3)}(0) = 2, \qquad \tan^{(4)}(0) = 0, \qquad \tan^{(5)}(0) = 16.$$

Or par la formule de Taylor-Young, puisque tan est $\mathscr{C}^5$ au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}
\tan(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{5} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k \\
&\underset{x\to 0}{=} \tan(0) + \tan'(0)x + \frac{\tan^{(2)}(0)}{2}x^2 + \frac{\tan^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{\tan^{(4)}(0)}{24}x^4 + \frac{\tan^{(5)}(0)}{120}x^5 + o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 0 + x + \frac{2x^3}{6} + \frac{16x^5}{120} + o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right).}$$

Méthode 2 : avec la réciproque, c'est sans équivoque

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) D'après le cours, on sait que

$$\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots + (-1)^n u^n + o(u^n) \underset{u\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^k + o(u^n).$$

   Donc en posant $u = x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o\left(x^{2n}\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o\left(x^{2n}\right).}$$

   (b) On sait que la fonction arctan est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$. Donc par la question précédente et le théorème de primitivation des développements limités, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\arctan(x) &\underset{x\to 0}{=} \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \arctan(0) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

Comme $\arctan(0) = 0$,

$$\boxed{\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)}$$

ou encore

$$\boxed{\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right).}$$

Observez que l'on a que des monômes de degré impair, ce qui est normal car la fonction arctan *est impaire sur* $\mathbb{R}$*.*

(c) En particulier si $n = 2$, on déduit de la question précédente que

$$\boxed{\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right).}$$

7. D'après la partie précédente, on sait que

$$\tan(u) \underset{u\to 0}{=} a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5 + o\left(u^5\right).$$

Posons $u = \arctan(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Alors, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
u &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right).\\
u^2 &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)\\
&= x^2 - \frac{x^4}{3} + o\left(x^5\right) - \frac{x^4}{3} + o\left(x^5\right)\\
&= x^2 - \frac{2x^4}{3} + o\left(x^5\right)\\
u^3 &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)\left(x^2 - \frac{2x^4}{3} + o\left(x^5\right)\right)\\
&= x^3 - \frac{2x^5}{3} + o\left(x^5\right) - \frac{x^5}{3} + o\left(x^5\right)\\
&= x^3 - x^5 + o\left(x^5\right)\\
u^5 &= u^2u^3 = \left(x^2 - \frac{2x^4}{3} + o\left(x^5\right)\right)\left(x^3 - x^5 + o\left(x^5\right)\right)\\
&= x^5 + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\tan\left(\arctan(x)\right) \underset{x\to 0}{=} a_1 x \quad & - a_1\frac{x^3}{3} && + a_1\frac{x^5}{5} && + o\left(x^5\right)\\
& + a_3x^3 && - a_3x^5 && + o\left(x^5\right)\\
& && + a_5x^5 && + o\left(x^5\right)\\
\underset{x\to 0}{=} a_1 x \quad & + \left(a_3 - \frac{a_1}{3}\right)x^3 && + \left(\frac{a_1}{5} - a_3 + a_5\right)x^5 && + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\tan\left(\arctan(x)\right) \underset{x\to 0}{=} a_1 x + \left(a_3 - \frac{a_1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{a_1}{5} - a_3 + a_5\right)x^5 + o\left(x^5\right).}$$

8. D'après sa définition, la fonction arctan est la réciproque de la **restriction** de la fonction tangente à l'ensemble $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. On sait que $\boxed{\text{pour tout } x\in\mathbb{R},\ \tan(\arctan(x)) = x}$.

   Attention l'inverse est faux ! $\arctan(\tan(x)) \neq x$ *en général.*

9. Des deux questions précédentes, on en déduit que
$$x \underset{x\to 0}{=} a_1 x + \left(a_3 - \frac{a_1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{a_1}{5} - a_3 + a_5\right)x^5 + o\left(x^5\right).$$
   Donc par unicité des coefficient d'un développement limité, on a nécessairement
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 - \frac{a_1}{3} = 0 \\ \frac{a_1}{5} - a_3 + a_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = \frac{a_1}{3} = \frac{1}{3} \\ a_5 = a_3 - \frac{a_1}{5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}. \end{cases}$$
   Conclusion, $\boxed{a_1 = 1}$, $\boxed{a_3 = \frac{1}{3}}$, $\boxed{a_5 = \frac{2}{15}}$ et
$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right).}$$

Méthode 3 : quand sinus et cosinus prennent la tangente

10. D'après le cours, on sait que
$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right) \\ \cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right). \end{aligned}}$$

11. De la question précédente, on obtient
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)}$$
   Or $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + o\left(u^3\right)$. Donc en posant $u \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a
$$\begin{aligned} u &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right) \\ u^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)\right)\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{4} + o\left(x^5\right) \\ u^3 &\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)\right)\left(\frac{x^4}{4} + o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right) \\ o\left(u^3\right) &\underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right). \end{aligned}$$
   Alors,
$$\begin{array}{cclll} \frac{1}{1+u} & \underset{x\to 0}{=} 1 & +\frac{x^2}{2} & -\frac{x^4}{24} & +o\left(x^5\right) \\ & & & +\frac{x^4}{4} & +o\left(x^5\right) \\ & & & & +o\left(x^5\right) \\ & \underset{x\to 0}{=} 1 & +\frac{x^2}{2} & +\frac{5x^4}{24} & +o\left(x^5\right) \end{array}$$

et donc,

$$\begin{aligned}
\tan(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o\left(x^5\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{2}+\frac{5x^5}{24}+o\left(x^5\right)-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{12}+o\left(x^5\right)+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien encore une fois le résultat,

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right).}$$

Méthode 4 : laissons-nous dériver petit à petit

12. Par la question 3. on a $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$. Donc

$$1+\tan^2(x) \underset{x\to 0}{=} 1+(x+o(x))^2 \underset{x\to 0}{=} 1+x^2+2xo(x)+o(x)^2.$$

Conclusion,

$$\boxed{1+\tan^2(x) \underset{x\to 0}{=} 1+x^2+o\left(x^2\right).}$$

13. Par primitivation des développements limités, on déduit de la question précédente que

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \tan(0)+x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right).$$

Donc

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right).}$$

14. Donc en prenant ce nouveau développement limité de la fonction tangente, on trouve

$$\begin{aligned}
1+\tan^2(x) &\underset{x\to 0}{=} 1+\left(x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)\left(x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x^2+\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)+\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x^2+\frac{2x^4}{3}+o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Alors par intégration des développements limités,

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \tan(0)+x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right).$$

Finalement, pour la quatrième fois, on retrouve toujours le même résultat,

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right).}$$

Une petite dernière pour la route !

15. On sait que $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$. Donc

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right) + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + \frac{1+6+1}{24}x^4 + o\left(x^4\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Par suite, on obtient,

$$\frac{1}{\cos^2(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)}.$$

On sait que $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 + o\left(u^2\right)$. Posons $u(x) = -x^2 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)$. On a alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$
- $u(x) \underset{x\to 0}{=} -x^2 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)$
- Puis,

$$\begin{aligned}
u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(-x^2 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)\right)\left(-x^2 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x^4 + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

- Puisque $u(x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^4$, on obtient $o\left(u(x)^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$.

Dès lors,

$$\begin{array}{llllll}
\frac{1}{1+u} & \underset{x\to 0}{=} 1 & +x^2 & -\frac{x^4}{3} & +o\left(x^4\right) \\
& & & +x^4 & +o\left(x^4\right) \\
& & & & +o\left(x^4\right) \\
& \underset{x\to 0}{=} 1 & +x^2 & +\frac{2x^4}{3} & +o\left(x^4\right).
\end{array}$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{1}{\cos^2(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o\left(x^4\right).}$$

16. On sait que la fonction tangente est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ (voisinage de 0). Donc par la question précédente et le théorème de primitivation des développements limités on obtient

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \tan(0) + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right).$$

Conclusion, on commence à être serein sur notre résultat, on obtient

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right).}$$

Exercice III - Bonus !

1. Pour calculer le produit matriciel AB avec A et B deux matrices de taille n : $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$. On doit pour chaque coefficient utiliser la formule bien connue

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \qquad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Ainsi, pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, le calcul de $c_{i,j}$ demande de sommer n produits et donc demande de calculer n produits. Or la matrice C possède $n \times n = n^2$ coefficients. Donc au total, on obtient bien

$$\boxed{n \times n^2 = n^3 \text{ produits pour calculer } AB.}$$

2. Soient $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$. On pose

$$\begin{aligned} m_1 &= (a_{1,1} + a_{2,2})(b_{1,1} + b_{2,2}), & m_2 &= (a_{2,1} + a_{2,2}) b_{1,1}, & m_3 &= a_{1,1}(b_{1,2} - b_{2,2}) \\ m_4 &= a_{2,2}(b_{2,1} - b_{1,1}), & m_5 &= (a_{1,1} + a_{1,2}) b_{2,2}, & m_6 &= (a_{2,1} - a_{1,1})(b_{1,1} + b_{1,2}) \\ & & m_7 &= (a_{1,2} - a_{2,2})(b_{2,1} + b_{2,2}) \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} m_1 &= a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,1}b_{2,2} + a_{2,2}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,2} \\ m_2 &= a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{1,1} \\ m_3 &= a_{1,1}b_{1,2} - a_{1,1}b_{2,2} \\ m_4 &= a_{2,2}b_{2,1} - a_{2,2}b_{1,1} \\ m_5 &= a_{1,1}b_{2,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ m_6 &= a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,1}b_{1,2} - a_{1,1}b_{1,1} - a_{1,1}b_{1,2} \\ m_7 &= a_{1,2}b_{2,1} + a_{1,2}b_{2,2} - a_{2,2}b_{2,1} - a_{2,2}b_{2,2}. \end{aligned}$$

On a $c_{1,1} = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1}$. Or $a_{1,1}b_{1,1} = m_1 - a_{1,1}b_{2,2} - a_{2,2}b_{1,1} - a_{2,2}b_{2,2}$ et $a_{1,2}b_{2,1} = m_7 - a_{1,2}b_{2,2} + a_{2,2}b_{2,1} + a_{2,2}b_{2,2}$. Donc

$$\begin{aligned} c_{1,1} &= m_1 - a_{1,1}b_{2,2} - a_{2,2}b_{1,1} - a_{2,2}b_{2,2} + m_7 - a_{1,2}b_{2,2} + a_{2,2}b_{2,1} + a_{2,2}b_{2,2} \\ &= m_1 + m_7 - (a_{1,1}b_{2,2} + a_{1,2}b_{2,2}) + a_{2,2}b_{2,1} - a_{2,2}b_{1,1} \\ &= m_1 + m_7 - m_5 + m_4. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ &= m_3 + a_{1,1}b_{2,2} + m_5 - a_{1,1}b_{2,2} \\ &= m_3 + m_5. \end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned} c_{2,1} &= a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} \\ &= m_2 - a_{2,2}b_{1,1} + m_4 - a_{2,2}b_{1,1} \\ &= m_2 + m_4. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} c_{2,2} &= a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \\ &= m_6 - a_{2,1}b_{1,1} + a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,1}b_{1,2} + m_1 - a_{1,1}b_{1,1} - a_{1,1}b_{2,2} - a_{2,2}b_{1,1} \\ &= m_6 + m_1 - (a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{1,1}) + a_{1,1}b_{1,2} - a_{1,1}b_{2,2} \\ &= m_6 + m_1 - m_2 + m_3. \end{aligned}$$

Conclusion, pour trouver tous les coefficients de la matrice C, il suffit de calculer les sept nombres m_k et on obtient alors les $c_{i,j}$ par les sommes suivantes :

$$\boxed{c_{1,1} = m_1 + m_4 - m_5 + m_7, \quad c_{1,2} = m_3 + m_5, \quad c_{2,1} = m_2 + m_4, \quad c_{2,2} = m_1 - m_2 + m_3 + m_6.}$$