Devoir Maison 6
Analyse asymptotique, Ensemble et application, continuité dérivabilité

A faire pour le jeudi 26 janvier

Problème I - Problème de raccord

On considère l'équation différentielle suivante

(E) $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad xy'(x) + (2x+1)y(x) = x^2 \,\mathrm{e}^{-x}.$$

Partie 1 : Je n'ai jamais rencontré y mais je sais déjà tout de sa vie en 0

1. Pourquoi le cours ne garantit pas d'existence de solution sur $\mathbb{R}$ de (E) ?

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. On fixe dans la suite y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. On suppose que y est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. On souhaite calculer le développement limité de y à l'ordre 3 en 0 sans chercher à résoudre (E).

2. Calculer $y(0)$.
3. Justifier que y admet un développement limité en 0 à l'ordre n, on le notera
$$y(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right).$$
où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$.
4. Préciser a_0.
5. Justifier que y' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ en 0 et le déterminer en fonction des coefficients a_k, $k \in [\![1;n]\!]$.
6. Préciser le développement limité à l'ordre n en 0 de $x \mapsto xy'(x) + (2x+1)y(x)$ toujours en fonction des coefficients a_k, $k \in [\![1;n]\!]$.
7. Déterminer le développement limité à l'ordre n de $x \mapsto x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.
8. En déduire que $a_1 = 0$ et que pour tout $k \in [\![2;n]\!]$,
$$a_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)\,(k-2)!} - \frac{2}{k+1} a_{k-1}.$$
9. En déduire le développement limité en 0 à l'ordre 3 de y.
10. En déduire $y'(0)$, $y''(0)$ et $y'''(0)$.
11. Déterminer un équivalent de y en 0.
12. Justifier que le point $(0; y(0))$ est un minimum local de la fonction y.

Partie 2 : les PTSI voici y, y voici les PTSI

13. Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur $]0;+\infty[$.

14. Soit $x>0$. Calculer
$$I(x)=\int_0^x t^2\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

15. Déterminer $\mathscr{S}_+$ l'ensemble des solutions de (E) sur $]0;+\infty[$.

On admet que $\mathscr{S}_-$ l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty;0[$ est donné par
$$\mathscr{S}_-=\left\{y:\begin{array}{ccc}]-\infty;0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\left(2-2x+x^2\right)\mathrm{e}^{-x}+A\,\mathrm{e}^{-2x}}{x}\end{array}\;\middle|\; A\in\mathbb{R}\right\}.$$

16. Soit $A\in\mathbb{R}$, calculer suivant les valeurs de A, la limite suivante :
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\left(2-2x+x^2\right)\mathrm{e}^{-x}+A\,\mathrm{e}^{-2x}}{x}.$$

17. Soit y_1 une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique expression possible de y_1 que l'on précisera.

18. A partir de la question précédente, déterminer un développement limité de $x\mapsto xy_1(x)$ en 0 à l'ordre 4.

19. En déduire un développement limité de y_1 à l'ordre 3 en 0 puis que y_1 est dérivable en 0. Préciser $y_1(0)$ et $y_1'(0)$.

20. En conclure $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

21. Les résultats des questions 9. et 19. sont-ils cohérents ?

Partie 3 : Jouons aussi avec le second membre

On considère
$$g:\qquad x\mapsto\begin{cases}x^2\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

22. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

23. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, montrer que g est $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $g^{(n)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

24. En déduire pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g^{(n)}(x)$.

25. Montrer que g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $g'(0)$.

26. Montrer que g n'est pas deux fois dérivable en 0.

Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $f'(0)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ et $f'(1)>0$.

27. Vérifier que g vérifie les hypothèses de f.

28. Montrer qu'il existe $b_0\in]1;+\infty[$ tel que $f'(b_0)\leqslant\frac{f'(1)}{2}$.

29. En déduire qu'il existe $b\in]1;+\infty[$ tel que $f'(b)=\frac{f'(1)}{2}$.

30. Montrer qu'il existe $a\in]0;1[$ tel que $f'(a)=\frac{f'(1)}{2}$.

31. Montrer que f'' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

32. Montrer qu'il existe $A\in\mathbb{R}_+$ telle que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[A;+\infty[$.

Problème II - Ensembles et applications

Soit E un ensemble et A et B deux parties fixées de E. On pose

$$f \quad : \quad \begin{array}{l} \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X \mapsto (A \cap X\, ,\, B \cap X)\,. \end{array}$$

1. On suppose que f est injective sur $\mathscr{P}(E)$.
   (a) Calculer $f(A \cup B)$ et $f(E)$.
   (b) Que peut-on en déduire ?
2. On suppose maintenant que $E = A \cup B$. Soit $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $f(X) = f(Y)$.
   (a) Soit $x \in A$. Montrer que $x \in X \ \Rightarrow \ x \in Y$.
   (b) Montrer que $X \subseteq Y$.
   (c) Montrer que f est injective.
3. Conclure une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.
4. *(Facultative)* Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.