Correction du Devoir Maison 6 Analyse asymptotique, Ensemble et application, continuité dérivabilité

Du jeudi 26 janvier

Problème I - Problème de raccord

On considère l'équation différentielle suivante

(E) $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad xy'(x) + (2x+1)y(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x}.$$

Partie 1 : Je n'ai jamais rencontré y mais je sais déjà tout de sa vie en 0

1. On observe que l'équation (E) n'est pas *résolue* en y' i.e. le coefficient devant y' n'est pas égal à 1 et s'annule même en 0. On peut donc écrire sur $\mathbb{R}_+^*$ que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y'(x) + \frac{2x+1}{x} y(x) = x\,\mathrm{e}^{-x},$$
avec $a : x \mapsto \frac{2x+1}{x}$ et $b : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$ continues sur $\mathbb{R}_+^*$. De même sur $\mathbb{R}_-^*$, mais on ne peut obtenir cette simplification sur $\mathbb{R}$ tout entier. Conclusion,
$$\boxed{\text{le cours ne garantit pas d'existence de solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E) \text{ car } x \mapsto x \text{ s'annule en } 0.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. On fixe dans la suite y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. On suppose que y est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. On souhaite calculer le développement limité de y à l'ordre 3 en 0 sans chercher à résoudre (E).

2. En évaluant (E) en 0, on obtient $0 + y(0) = 0$. Conclusion,
$$\boxed{y(0) = 0.}$$

3. Par hypothèse, la fonction y est une fonction $\mathscr{C}^n$ donc par la formule de Taylor-Young, on en déduit que
$$\boxed{y \text{ admet un développement limité à l'ordre } n \text{ en } 0.}$$
Notons-le
$$y(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right).$$
NB : toujours par la formule de Taylor-Young, on sait que
$$y(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^n\right).$$
Donc par l'unicité du développement limité, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $a_k = \frac{y^{(k)}(0)}{k!}$.

4. Par la question précédente, on a
$$y(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + o\left(1\right).$$
Puisque y est $\mathscr{C}^n$, $n \geqslant 3$, sur $\mathbb{R}$ on en déduit que y est continue en 0. Donc par passage à la limite,
$$y(0) = \lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0} a_0 + o\left(1\right) = a_0.$$
De plus, par la question 2. $y(0) = 0$. Conclusion,
$$\boxed{a_0 = 0.}$$

5. Puisque y est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que y' existe et que y' est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$. Donc par la formule de Taylor-Young, il existe $(b_0, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$y'(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k + o\left(x^{n-1}\right).$$

Or y est une primitive de y' sur $\mathbb{R}$. Donc par le théorème de primitivation du développement limité, on en déduit que

$$y(x) \underset{x\to 0}{=} y(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k+1} x^{k+1} + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{k-1}}{k} x^k + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{k-1}}{k} x^k + o\left(x^n\right).$$

Or par la question précédente, on a aussi

$$y(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right).$$

Donc par unicité du développement limité,

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \frac{b_{k-1}}{k} = a_k \iff b_{k-1} = k a_k.$$

Donc pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, $b_k = (k+1)\,a_{k+1}$. Conclusion,

$$\boxed{y'(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,a_{k+1} x^k + o\left(x^{n-1}\right).}$$

6. Nous avons vu que

$$y(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} 0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right) \qquad \text{et} \qquad y'(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,a_{k+1} x^k + o\left(x^{n-1}\right).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} xy'(x) + (2x+1)y(x) &\underset{x\to 0}{=} x\left[\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,a_{k+1} x^k + o\left(x^{n-1}\right)\right] + (2x+1)\left[\sum_{k=1}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right)\right] \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,a_{k+1} x^{k+1} + o\left(x^n\right) + \sum_{k=1}^{n} 2a_k x^{k+1} + o\left(x^{n+1}\right) \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right). \end{aligned}$$

Posons $\tilde{k} = k+1$ dans les deux premières sommes,

$$\begin{aligned} xy'(x) + (2x+1)y(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} k a_k x^k + \sum_{k=2}^{n+1} 2a_{k-1} x^k + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(k a_k x^k 2a_{k-1} x^k + a_k x^k\right) - \underbrace{2a_0}_{=0} + \underbrace{2a_n x^{n+1}}_{=o(x^n)} + o\left(x^n\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)\,a_k + 2a_{k-1}\right] x^k + o\left(x^n\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{xy'(x) + (2x+1)y(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)\,a_k + 2a_{k-1}\right] x^k + o\left(x^n\right).}$$

7. On sait que

$$\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} + o\left(u^n\right).$$

Posons $u = -x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Alors,

$$\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} + o\left((-x)^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k + o\left(x^n\right)$$

Donc

$$x^2\,\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^{k+2} + o\left(x^{n+2}\right).$$

Posons $\tilde{k} = k+2$,

$$x^2\,\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=2}^{n+2} \frac{(-1)^{k-2}}{(k-2)!} x^{k} + o\left(x^{n+2}\right).$$

Or $(-1)^{k-2} = (-1)^k$. Donc, en tronquant à l'ordre n,

$$\begin{aligned} x^2\,\mathrm{e}^{-x} &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{(k-2)!} x^k + \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} x^{n+1} + \frac{(-1)^{n+2}}{(n)!} x^{n+2} + o\left(x^{n+2}\right) \qquad \text{car } n \geqslant 2 \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{(k-2)!} x^k + o\left(x^n\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{x^2\,\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{(k-2)!} x^k + o\left(x^n\right).}$$

8. Puisque y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad xy'(x) + (2x+1)y(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Or par les questions précédentes,

$$\begin{aligned} xy'(x) + (2x+1)y(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)\,a_k + 2a_{k-1}\right] x^k + o\left(x^n\right) \\ x^2\,\mathrm{e}^{-x} &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{(k-2)!} x^k + o\left(x^n\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)\,a_k + 2a_{k-1}\right] x^k + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{(k-2)!} x^k + o\left(x^n\right).$$

Donc par unicité du développement limité,

$$2a_1 + 2a_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [\![2;n]\!], \qquad (k+1)\,a_k + 2a_{k-1} = \frac{(-1)^k}{(k-2)!}$$

Or $a_0 = 0$, donc $\boxed{a_1 = 0}$. D'autre part,

$$\boxed{\forall k \in [\![2;n]\!], \qquad a_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)\,(k-2)!} - \frac{2}{k+1} a_{k-1}.}$$

9. Par la question précédente, pour $k=2$, on a
$$a_2 = \frac{(-1)^2}{3\,(0)!} - \frac{2}{3}a_1 = \frac{1}{3}.$$
Par suite, pour $k=3$,
$$a_3 = \frac{(-1)^3}{4\,(1)!} - \frac{2}{4}a_3 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = -\frac{3+2}{12} = -\frac{5}{12}.$$
Or $a_0 = a_1 = 0$ et par la question 3. $y(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right)$. Donc par tronquature à l'ordre 3 car $n \geqslant 3$, on a
$$y(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o\left(x^3\right).$$
Conclusion,
$$\boxed{y(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{3} - \frac{5x^3}{12} + o\left(x^3\right).}$$

10. Puisque y est $\mathscr{C}^n$ en 0 et $n \geqslant 3$, alors y est $\mathscr{C}^3$. Donc par la formule de Taylor-Young, on en déduit que
$$y(x) \underset{x\to 0}{=} y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \frac{y'''(0)}{6}x^3 + o\left(x^3\right).$$
Donc par la question précédente et l'unicité du développement limité,
$$y(0) = 0 \text{ (déjà vu)}, \qquad y'(0) = 0, \qquad \frac{y''(0)}{2} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{y'''(0)}{6} = -\frac{5}{12}.$$
Conclusion,
$$\boxed{y'(0) = 0, \qquad y''(0) = \frac{2}{3}, \qquad y'''(0) = -\frac{5}{2}.}$$

11. Par la question 9. on en déduit directement que
$$y(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{3}.$$

12. On sait que $y(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{3}$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2}{3} \geqslant 0$ et deux équivalents ont le même signe au voisinage du point considéré. On en déduit donc que pour tout x au voisinage de 0, $y(x)$ est positif. Or $y(0) = 0$. Donc pour tout x au voisinage de 0, $y(x) \geqslant 0 = y(0)$. Conclusion,
$$\boxed{\text{le point } (0; y(0)) \text{ est un minimum local de la fonction } y.}$$

Partie 2 : les PTSI voici y, y voici les PTSI

13. Soit (E_0) L'équation homogène associée à (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $y \in \mathscr{F}\left(]0; +\infty[; \mathbb{R}\right)$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque x est non nul sur $]0; +\infty[$, on a
$$(E_0) \qquad \forall x > 0, \quad y'(x) + \frac{2x+1}{x}y(x) = 0.$$
La fonction $a : x \mapsto \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet des primitives dont l'une est donnée par $A : x \mapsto 2x + \ln(x)$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{e}^{-A(x)} = \mathrm{e}^{-2x-\ln(x)} = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}$. Donc l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est donné par
$$\boxed{\mathscr{S}_0^+ = \left\{ y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x} \end{array} \middle| \; C \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x} \end{array} \right).}$$

14. Soit $x>0$. On pose pour tout $t\in\mathbb{R}$,
$$\begin{cases} u(t)=\mathrm{e}^t \\ v(t)=t^2. \end{cases}$$
Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0;x]$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$,
$$\begin{cases} u'(t)=\mathrm{e}^t \\ v'(t)=2t. \end{cases}$$
Donc par intégration par parties,
$$I(x)=\int_0^x t^2\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\left[t^2\,\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^{t=x}-\int_0^x 2t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=x^2\,\mathrm{e}^x-2\int_0^x t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$
A nouveau par une intégration par parties : posons pour tout $t\in\mathbb{R}$,
$$\begin{cases} u(t)=\mathrm{e}^t \\ v(t)=t. \end{cases}$$
Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$,
$$\begin{cases} u'(t)=\mathrm{e}^t \\ v'(t)=1. \end{cases}$$
On obtient,
$$I(x)=x^2\,\mathrm{e}^x-2\left[t\,\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^{t=x}+2\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=x^2\,\mathrm{e}^x-2x\,\mathrm{e}^x+2\,\mathrm{e}^x-2.$$
Conclusion,
$$\boxed{I(x)=\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{e}^x-2.}$$

15. Posons :
   - $y_0 : x\mapsto \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}$. On a $y_0\in\mathscr{S}_0^+$.
   - y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - $\lambda=\frac{y}{y_0}$ (car $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $y_0(x)\neq 0$) i.e. $y=\lambda y_0$.

La fonction λ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. On a alors les équivalences suivantes :
$$\begin{array}{ll} & y \text{ est une solution (E)} \\ \Leftrightarrow & \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad x\,\lambda'(x)y_0(x)+x\,\lambda(x)y_0'(x)+(2x+1)\,\lambda(x)y_0(x)=x^2\,\mathrm{e}^{-x} \\ \Leftrightarrow & \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad x\,\lambda'(x)y_0(x)+\lambda(x)\underbrace{\left(xy_0'(x)+(2x+1)\,y_0(x)\right)}_{=0\quad \text{car } y_0\in\mathscr{S}_0^+}=x^2\,\mathrm{e}^{-x} \\ \Leftrightarrow & \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad \lambda'(x)\,\mathrm{e}^{-2x}=x^2\,\mathrm{e}^{-x} \\ \Leftrightarrow & \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad \lambda'(x)=x^2\,\mathrm{e}^x\,. \end{array}$$
La fonction $x\mapsto x^2\,\mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet donc des primitives sur cet intervalle. De plus d'après la question précédente, on a
$$\begin{array}{lll} & y \text{ est une solution (E)} & \\ \Leftrightarrow & \exists C\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*, & \lambda(x)=\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{e}^x+C \\ \Leftrightarrow & \exists C\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*, & y(x)=\lambda(x)y_0(x)=\left(\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{e}^x+C\right)\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{x} \\ \Leftrightarrow & \exists C\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*, & y(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x}\,\mathrm{e}^{-x}+C\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}. \end{array}$$

Conclusion,
$$\boxed{\mathscr{S}_+ = \left\{ y : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2-2x+2}{x}\,\mathrm{e}^{-x} + C\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x} \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Cela semble bien cohérent avec l'ensemble $\mathscr{S}_-$ donné ci-dessous.

On admet que $\mathscr{S}_-$ l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty;0[$ est donné par
$$\mathscr{S}_- = \left\{ y : \begin{array}{ccc}]-\infty;0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{(2-2x+x^2)\,\mathrm{e}^{-x} + A\,\mathrm{e}^{-2x}}{x} \end{array} \,\middle|\, A \in \mathbb{R} \right\}.$$

16. Soit $A \in \mathbb{R}$. On a les égalités asymptotiques suivantes
$$\begin{aligned} \frac{(2-2x+x^2)\,\mathrm{e}^{-x} + A\,\mathrm{e}^{-2x}}{x} &\underset{\substack{x\to0\\x<0}}{=} \frac{(2-2x+o(x))(1-x+o(x)) + A(1-2x+o(x))}{x} \\ &\underset{\substack{x\to0\\x<0}}{=} \frac{2-2x-2x+o(x)+A-2Ax+o(x)}{x} \\ &\underset{\substack{x\to0\\x<0}}{=} \frac{2+A}{x} - (4+2A) + o(1). \end{aligned}$$

Si $A \neq -2$ *(ne pas écrire équivalent à 0 !!!)*, on a
$$\frac{(2-2x+x^2)\,\mathrm{e}^{-x} + A\,\mathrm{e}^{-2x}}{x} \underset{\substack{x\to0\\x<0}}{\sim} \frac{2+A}{x}.$$

Or deux équivalents ont la même limite. Si $A < -2$, alors
$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{(2-2x+x^2)\,\mathrm{e}^{-x} + A\,\mathrm{e}^{-2x}}{x} = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{2+A}{x} = +\infty.$$

De même, si $A > -2$,
$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{(2-2x+x^2)\,\mathrm{e}^{-x} + A\,\mathrm{e}^{-2x}}{x} = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{2+A}{x} = -\infty.$$

Enfin, si $A = -2$, alors
$$\frac{(2-2x+x^2)\,\mathrm{e}^{-x} + A\,\mathrm{e}^{-2x}}{x} \underset{\substack{x\to0\\x<0}}{=} o(1) \underset{\substack{x\to0\\x<0}}{\longrightarrow} 0.$$

Conclusion, on a
$$\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{(2-2x+x^2)\,\mathrm{e}^{-x} + A\,\mathrm{e}^{-2x}}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } A < -2 \\ 0 & \text{si } A = -2 \\ -\infty & \text{si } A > -2. \end{cases}}$$

17. Soit y_1 une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire :
    - y_1 est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
    - y_1 est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.
    - y_1 est solution de (E) en 0.
    - y_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Puisque y_1 est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$, il existe $A \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad y_1(x) = \frac{\left(2-2x+x^2\right) \mathrm{e}^{-x} + A\,\mathrm{e}^{-2x}}{x}.$$

De plus, y_1 est aussi une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, donc il existe $B \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y_1(x) = \frac{\left(2-2x+x^2\right) \mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{-2x}}{x}.$$

On sait également que y_1 est dérivable et donc continue sur $\mathbb{R}$. Notamment admet une limite à gauche finie en 0 :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} y_1(x) = y_1(0) = 0 \qquad \text{d'après la question 1.}$$

Or d'après la question précédente, cette limite n'est finie que si $A = -2$. On en déduit donc que $A = -2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $y_1(x) = \frac{\left(2-2x+x^2\right) \mathrm{e}^{-x} - 2\,\mathrm{e}^{-2x}}{x}$.

Exactement de la même façon, on montre que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } B = -2 \\ \pm\infty & \text{si } B \neq -2 \end{cases}$$

dont on déduit que $B = -2$.

Les deux constantes étant fixées, on en déduit que $\boxed{\text{si } y_1 \text{ existe, elle est nécessairement unique}}$ et vaut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y_1(x) = \begin{cases} \frac{\left(2-2x+x^2\right) \mathrm{e}^{-x} - 2\,\mathrm{e}^{-2x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}}$$

18. Par la question précédente, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $xy_1(x) = \left(2-2x+x^2\right) \mathrm{e}^{-x} - 2\,\mathrm{e}^{-2x}$ et l'on note que cette formule reste vraie si $x = 0$. Or

$$\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right).$$

Mais aussi

$$\mathrm{e}^{-2x} \underset{x\to 0}{=} 1 - 2x + \frac{4x^2}{2} - \frac{8x^3}{6} + \frac{16x^4}{24} + o\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3} + o\left(x^4\right).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
xy_1(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(2-2x+x^2\right) \mathrm{e}^{-x} - 2\,\mathrm{e}^{-2x} \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(2-2x+x^2\right)\left(1 - x + \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right) \\
&\qquad\qquad -2\left(1 - 2x + 2x^2 - \tfrac{4x^3}{3} + \tfrac{2x^4}{3} + o\left(x^4\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{cccccc}
2 & -2x & +x^2 & -\frac{x^3}{3} & +\frac{x^4}{12} & +o\left(x^4\right) \\
 & -2x & +2x^2 & -x^3 & +\frac{x^4}{3} & +o\left(x^4\right) \\
 & & +x^2 & -x^3 & +\frac{x^4}{2} & +o\left(x^4\right) \\
-2 & +4x & -4x^2 & +\frac{8x^3}{3} & -\frac{4x^4}{3} & +o\left(x^4\right)
\end{array} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{3} - \frac{5x^4}{12} + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{xy_1(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{3} - \frac{5x^4}{12} + o\left(x^4\right).}$$

19. Par la question précédente, on a directement,

$$\boxed{y_1(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{3} - \frac{5x^3}{12} + o\left(x^3\right).}$$

Donc par troncature, y_1 possède un développement limité à l'ordre 1 en 0 donc

$$\boxed{y_1 \text{ est dérivable en } 0.}$$

De plus, $y_1(x) \underset{x\to 0}{=} 0 + o(x)$. Donc

$$\boxed{y(0) = y'(0) = 0.}$$

20. *Analyse.* Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Alors par la question 17.

$$y = y_1 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\left(2-2x+x^2\right)\mathrm{e}^{-x} - 2\,\mathrm{e}^{-2x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Donc l'ensemble solution est au plus un singleton :

$$\mathscr{S} \subseteq \left\{ y_1 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\left(2-2x+x^2\right)\mathrm{e}^{-x} - 2\,\mathrm{e}^{-2x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array} \right\}.$$

Synthèse. Réciproquement. Soit $y_1 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\left(2-2x+x^2\right)\mathrm{e}^{-x} - 2\,\mathrm{e}^{-2x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$ Par la question 15. en prenant $C = -2$, on a $y_1 \in \mathscr{S}_+$ et donc

$$(i) \qquad y_1 \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

De même en prenant $A = -2$, on a

$$(ii) \qquad y_1 \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_-^*.$$

De plus en 0, on a $y_1(0) = 0$ ce qui correspond bien à (E) en 0. Donc

$$(iii) \qquad y_1 \text{ est solution de } (E) \text{ en } 0.$$

Soit y_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$. Enfin par la question 19.

(iv) $\qquad y_1$ est dérivable en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ (comme composée de fonctions qui le sont sur $\mathbb{R}^*$).

Donc par ces quatre points, on en déduit que y_1 est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Donc

$$y_1 \in \mathscr{S} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{ y_1 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\left(2-2x+x^2\right)\mathrm{e}^{-x} - 2\,\mathrm{e}^{-2x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array} \right\} \subseteq \mathscr{S}.$$

Conclusion, l'ensemble $\mathscr{S}$ possède une et une seule solution :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ y_1 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\left(2-2x+x^2\right)\mathrm{e}^{-x} - 2\,\mathrm{e}^{-2x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array} \right\}.}$$

21. On sait que y_1 est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$. De plus d'après la question 19. $y_1(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{3} - \frac{5x^3}{12} + o\left(x^3\right)$. Or nous avions déjà vu en première partie et notamment en question 9. que si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors $y(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{3} - \frac{5x^3}{12} + o\left(x^3\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Les résultats des questions 9. et 19. sont cohérents.}}$$

Dingue !

Partie 3 : Jouons aussi avec le second membre

On considère

$$g: \qquad x \mapsto \begin{cases} x^2\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

22. Puisque

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2\,\mathrm{e}^{-x} = 0 = g(0).$$

et que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} 0 = 0.$$

On en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} g(x) = g(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} g(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{g \text{ est continue en } 0.}$$

23. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sont $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$. Or pour tout $x > 0$, $g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$. Donc par produit,

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est } \mathscr{C}^n \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Posons $a : x \mapsto x^2$ et $b : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$. Puisque a et b sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$, par la formule de Leibniz,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{(k)}(x) b^{(n-k)}(x).$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$a^{(0)}(x) = x^2, \qquad a^{(1)}(x) = 2x, \qquad a^{(2)}(x) = 2, \qquad \forall k \geqslant 3,\ a^{(k)}(x) = 0.$$

Donc pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= \binom{n}{0} a^{(0)}(x) b^{(n)}(x) + \binom{n}{1} a^{(1)}(x) b^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} a^{(2)}(x) b^{(n-2)}(x) + 0 \\ &= x^2 b^{(n)}(x) + 2nx b^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} \times 2b^{(n-2)}(x). \end{aligned}$$

Or on montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $b^{(k)}(x) = (-1)^k\,\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi,

$$g^{(n)}(x) = x^2(-1)^n\,\mathrm{e}^{-x} + 2nx(-1)^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x} + n(n-1)(-1)^{n-2}\,\mathrm{e}^{-x} = (-1)^n\,\mathrm{e}^{-x}\left(x^2 - 2nx + n(n-1)\right).$$

De plus,

$$g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad g'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x} - x^2\,\mathrm{e}^{-x} = -\mathrm{e}^{-x}\left(x^2 - 2x\right).$$

Donc la formule précédente reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ *(important !)*. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g^{(n)}(x) = (-1)^n\,\mathrm{e}^{-x}\left(x^2 - 2nx + n(n-1)\right).}$$

24. En passant à la limite quand $x \to 0$ dans la question précédente, on obtient que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g^{(n)}(x) = (-1)^n\, n\,(n-1)\,.}$$

25. On a déjà vu que g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x \leqslant 0$, $g(x) = 0$. Donc g est aussi $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ *(attention à penser à enlever* 0*)* et $\forall x < 0$, $g'(0) = 0$. D'autre part, par la question précédente, pour $n = 1$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g'(x) = 0.$$

Et comme $\forall x < 0$, $g'(0) = 0$, on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g'(x) = 0 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g'(x).$$

Résumons :

- g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ donc sur $\mathbb{R}^*$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g'(x)$ existe et vaut 0.

Donc par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, la fonction g est $\mathscr{C}^1$ en 0 et $\boxed{g'(0) = 0}$. La fonction g étant $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et en 0, on en conclut que

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

26. Montrons que g n'est pas deux fois dérivable. Posons $h = g'$. Par la question précédente, h existe et est même continue sur $\mathbb{R}$. Montrons que h n'est pas dérivable en 0. Calculons son taux d'accroissement. Soit $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \frac{g'(x)-g'(0)}{x-0} &= \frac{-\mathrm{e}^{-x}\left(x^2-2x\right)-0}{x} \qquad \text{par les questions 23. et 25.}\\ &= -\mathrm{e}^{-x}\,(x-2)\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = 2.$$

D'autre part, $\forall x < 0$, $g'(x) = 0$. Donc

$$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \frac{g'(x)-g'(0)}{x-0} = \frac{0}{x} = 0 \underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{\longrightarrow} 0.$$

Puisque

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{h(x)-h(0)}{x-0}$$

on en déduit que h n'est pas dérivable en 0 *(mais admet un point anguleux : deux demi-tangentes d'équation* $y = 0$ *à gauche et* $y = 2x$ *à droite)*. Conclusion,

$$\boxed{g \text{ n'est pas deux fois dérivable en } 0.}$$

Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $f'(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ et $f'(1) > 0$.

27. Par la question 25. g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(0) = 0$. De plus par la question 23. g est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc notamment deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par la question 23. on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\left(x^2 - 2x\right)$. Donc par croissance comparée,
$$\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0.$$
Enfin, $g'(1) = -\mathrm{e}^{-1}(1-2) = \mathrm{e}^{-1} > 0$. Conclusion,
$$\boxed{g \text{ vérifie les hypothèses de } f.}$$

28. On sait que f' converge vers 0 en $+\infty$. Par définition,
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in [A; +\infty[, \qquad |f'(x)| \leqslant \varepsilon\,.$$
Puisque $f'(1) > 0$, on en déduit que $\frac{f'(1)}{2} > 0$. Donc en posant $\varepsilon = \frac{f'(1)}{2} > 0$,
$$\exists A \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in [A; +\infty[, \qquad |f'(x)| \leqslant \frac{f'(1)}{2}.$$
Notamment en prenant $b_0 = \max(A, 2)$ (ou n'importe quel réel plus grand que 1), on obtient un réel $b_0 \in]1; +\infty[$ tel que
$$f'(b_0) \leqslant |f'(b_0)| \leqslant \frac{f'(1)}{2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\exists b_0 \in]1; +\infty[, \qquad f'(b_0) \leqslant \frac{f'(1)}{2}.}$$

29. La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ donc f' est continue sur $[1; b_0]$. De plus, puisque $f'(1) > 0$, on a
$$f'(b_0) \leqslant \frac{f'(1)}{2} \leqslant f'(1).$$
Donc par le théorème des valeurs intermédiaires appliqués à f' sur le segment $[1; b_0]$, on en déduit qu'il existe $b \in [1; b_0]$ tel que $f'(b) = \frac{f'(1)}{2}$. Or $b_0 > 1$ donc $b \in [1; b_0] \subseteq]1; +\infty[$. Mais comme $f'(1) \neq \frac{f'(1)}{2}$ (car $f'(1) \neq 0$), on en déduit que $b \in]1; +\infty[$. Conclusion,
$$\boxed{\exists b \in]1; +\infty[, \qquad f'(b) = \frac{f'(1)}{2}.}$$

30. De même, f' est continue sur $[0; 1]$ et l'on a
$$f'(0) = 0 < \frac{f'(1)}{2} < f'(1).$$
Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in [0; 1]$ tel que $f'(a) = \frac{f'(1)}{2}$. Or $f'(0) \neq \frac{f'(1)}{2}$ et $f'(1) \neq \frac{f'(1)}{2}$ donc $a \neq 0$ et $a \neq 1$ et $a \in]0; 1[$. Conclusion,
$$\boxed{\exists a \in]0; 1[, \qquad f'(a) = \frac{f'(1)}{2}.}$$

31. On a $0 < a < 1 < b$. La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f' est continue sur $[a; b] \subseteq \mathbb{R}_+^*$ et dérivable sur $]a; b[$. De plus, par construction de a et b :
$$f'(a) = \frac{f'(1)}{2} = f'(b).$$
Donc par le théorème de Rolle, on en déduit que
$$\exists c \in]a; b[, \qquad (f')'(c) = 0.$$
Puisque $]a; b[\subseteq \mathbb{R}_+^*$, on en conclut que f'' s'annule bien au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\boxed{\exists c \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f''(c) = 0.}$$

32. Puisque $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on en déduit que

$$\exists A \in \mathbb{R}_+, \ \forall x \in [A; +\infty[, \qquad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Soit $(x, y) \in [A; +\infty[$, $x \neq y$. Alors, puisque f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$,

- f est continue sur $[x; y]$,
- f est dérivable sur $]x; y[$.

Donc par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x; y[$ tel que

$$f(x) - f(y) = f'(c)\,(x - y)\,.$$

Donc, par ce qui précède,

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)|\,|x - y| \leqslant \frac{1}{2}\,|x - y|\,.$$

encore vraie si $x = y$. Conclusion,

$$\boxed{\exists A \in \mathbb{R}_+, \ \forall\,(x, y) \in [A; +\infty[^2 , \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}\,|x - y|\,.}$$

Autrement dit

$$\boxed{\text{il existe } A \in \mathbb{R}_+ \text{ telle que } f \text{ est } \frac{1}{2}\text{-lipschitzienne sur } [A; +\infty[.}$$

Problème II - Ensembles et applications

Soit E un ensemble et A et B deux parties fixées de E. On pose

$$f \quad : \quad \begin{aligned} \mathscr{P}(E) &\to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X &\mapsto (A \cap X\,,\, B \cap X)\,. \end{aligned}$$

1. On suppose que f est injective sur $\mathscr{P}(E)$.

   (a) Posons $X = A \cup B$. Alors

   $$f(A \cup B) = f(X) = (A \cap X\,,\, B \cap X) = (A \cap (A \cup B)\,,\, B \cap (A \cup B))$$

   Or $A \subseteq A \cup B$ et $B \subseteq A \cup B$. Donc $A \cap (A \cup B) = A$ et $B \cap (A \cup B) = B$. Conclusion,

   $$\boxed{f(A \cup B) = (A\,,\, B)\,.}$$

   Posons maintenant $X = E$. Alors

   $$f(E) = f(X) = (A \cap X\,,\, B \cap X) = (A \cap E\,,\, B \cap E) = (A\,,\, B)\,.$$

   Comme $A \subseteq E$ et $B \subseteq E$, on a aussi,

   $$\boxed{f(E) = (A\,,\, B)\,.}$$

   (b) Nous avons établi dans la question précédente que

   $$f(A \cup B) = (A\,,\, B) = f(E)\,.$$

   Or la fonction f est injective. Donc, on en déduit que

   $$\boxed{A \cup B = E.}$$

2. On suppose maintenant que $E = A \cup B$. Soit $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $f(X) = f(Y)$.

   (a) Soit $x \in A$. Montrons que $x \in X \Rightarrow x \in Y$. Supposons donc que $x \in X$ et montrons que $x \in Y$. Par hypothèse, on a $f(X) = f(Y)$. Autrement dit

   $$(A \cap X, B \cap X) = (A \cap Y, B \cap Y) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} A \cap X = A \cap Y \\ B \cap X = B \cap Y \end{cases}.$$

   On a supposé que $x \in A$ et $x \in X$. Donc $x \in A \cap X = A \cap Y$. Or $A \cap Y \subseteq Y$ donc $x \in Y$. Ceci étant vrai pour $x \in X$ quelconque, on en conclut que

   $$\boxed{x \in X \Rightarrow x \in Y.}$$

   (b) Montrons que $X \subseteq Y$ i.e. $\forall x \in E$, $x \in X \Rightarrow x \in Y$. Fixons $x \in E$. Par hypothèse, $E = A \cup B$. Donc $x \in A$ ou $x \in B$.
   Premier cas, supposons $x \in A$. Par la question précédente, on a bien

   $$x \in X \Rightarrow x \in Y.$$

   Deuxième cas, supposons $x \in B$. Alors comme dans la question précédente, pour $x \in X$, on a $x \in X \cap B$. Or $B \cap X = B \cap Y$. Donc $x \in B \cap Y \subseteq Y$ et donc $x \in Y$. Ainsi, on a encore

   $$x \in X \Rightarrow x \in Y.$$

   Finalement dans tous les cas, on a $x \in X \Rightarrow x \in Y$:

   $$\forall x \in E, \qquad x \in X \Rightarrow x \in Y.$$

   Conclusion,

   $$\boxed{X \subseteq Y.}$$

   (c) Montrons que f est injective. Autrement dit, on veut montrer que

   $$\forall (X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2, \qquad f(X) = f(Y) \qquad \Rightarrow \qquad X = Y.$$

   Soit $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $f(X) = f(Y)$. Alors par la question précédente, on a $X \subseteq Y$. Par symétrie des hypothèses sur X et Y, on peut montrer exactement de la même façon que $Y \subseteq X$. Donc

   $$X = Y.$$

   Ainsi,

   $$\forall (X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2, \qquad f(X) = f(Y) \qquad \Rightarrow \qquad X = Y.$$

   Conclusion,

   $$\boxed{f \text{ est injective.}}$$

3. *(Facultative)* Supposons dans un premier temps f surjective et montrons alors que $A \cap B = \emptyset$. Procédons par l'absurde et supposons que $A \cap B \neq \emptyset$. Autrement dit supposons qu'il existe $e \in A \cap B$. Posons $A_1 = A \setminus \{e\}$ et $B_1 = \{e\}$. Puisque $e \in A \cap B \subseteq B$, on en déduit que $B_1 \in \mathscr{P}(B)$ et par définition de A_1, $A_1 \in \mathscr{P}(A)$. Donc $(A_1, B_1) \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$. Or f est surjective donc il existe $X \in \mathscr{P}(E)$ telle que $f(X) = (A_1, B_1)$ i.e. telle que

   $$(A \cap X\,,\, B \cap X) = (A \setminus \{e\}\,,\, \{e\}).$$

   Comme $B \cap X = \{e\}$, on en déduit que $e \in B \cap X$ et en particulier $e \in X$. Or par définition de e, on a $e \in A$. Donc $e \in A \cap X$. Or $A \cap X = A \setminus \{e\}$. Donc $e \in A \setminus \{e\}$ ce qui est contradictoire. Donc si f est surjective, alors $A \cap B = \emptyset$.

Réciproquement supposons $A \cap B = \emptyset$ et montrons que f est surjective. Soit $(A_1, B_1) \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$. Montrons qu'il existe $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $f(X) = (A_1, B_1)$. Posons

$$X = A_1 \cup B_1.$$

Puisque $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$ et que A et B sont disjointes : $A \cap B = \emptyset$, on en déduit que A_1 et B_1 sont aussi disjoints, $A_1 \cap B_1 = \emptyset$. Alors l'union est disjointe :

$$X = A_1 \sqcup B_1.$$

Montrons que $A \cap X = A_1$. Soit $x \in A \cap X$. Alors $x \in X = A_1 \sqcup B_1$ donc $x \in A_1$ ou $x \in B_1$.

Montrons que $x \in A_1$ en procédant par l'absurde. Supposons que $x \in B_1 \subseteq B$ alors $x \in B$. Or $x \in A \cap X$, donc $x \in A$. Donc $x \in A \cap B = \emptyset$ ce qui est impossible. Donc $x \notin B_1$. Donc nécessairement $x \in A_1$.

Résumons, on a pris $x \in A \cap X$ et on a montré que $x \in A_1$. Ainsi,

$$A \cap X \subseteq A_1.$$

Réciproquement, si $x \in A_1 \subseteq A$, alors $x \in A$. De plus, $A_1 \subseteq A_1 \sqcup B_1 = X$. Donc $x \in A_1 \subseteq X$ implique aussi $x \in X$. Dès lors, $x \in A \cap X$. D'où $A_1 \subseteq A \cap X$. On a donc montré que

$$A \cap X = A_1.$$

Par symétrie des hypothèses, on montre de la même manière que $B_1 = B \cap X$. Ainsi, pour $X = A_1 \sqcup B_1$, on a bien

$$f(X) = (A_1\,,\, B_1)\,.$$

Donc (A_1, B_1) possède un antécédent par f.

Ceci étant vrai pour tout $(A_1, B_1) \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$, on conclut que f est surjective.

Finalement,

$$\boxed{f \text{ surjective} \qquad \Leftrightarrow \qquad A \cap B = \emptyset.}$$