Devoir Maison 7
Suites numériques, polynômes

A faire pour le jeudi 16 février

Problème I - Suites numériques

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto x\sqrt{1+\frac{x}{n}}$.

Partie 1 : Une suite récurrente

On pose
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) = f_1(x)^2 = x^2(1+x) = x^2 + x^3.$$
et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = f''(a_n)$. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de a_n en fonction de n.
2. Déterminer le tableau de variation de $g : x \mapsto f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que g admet une unique valeur d'annulation sur $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$. On notera α cette valeur.
4. Préciser le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 = \alpha$.
5. on suppose $u_0 > \alpha$.
   (a) Tracer l'allure du graphe de f sur $\mathbb{R}_+$ et représenter le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]\alpha; +\infty[$.
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone.
   (d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger.
   (e) En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. On suppose que $u_0 < \alpha$. Dessiner le comportement de la suite et en procédant comme dans la question précédente, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
7. On suppose ici que $u_0 \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$.
   (a) Montrer que f est k-lipschitzienne sur $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ ou k est un réel fixé dans $]0; 1[$ que l'on précisera.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leqslant k\,|u_n|$.
   (c) En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(k^n)$. Est-ce cohérent avec la question 6. ?

Partie 2 : Une suite implicite

8. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in]0;1[$ tel que $f_n(x_n) = 1$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in]0;1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

10. Déterminer la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

11. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer ℓ sa limite.

12. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \ell - x_n$. Déterminer un équivalent de y_n puis en déduire que
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
où α est un réel que l'on précisera.

13. Procéder de même pour montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Partie 3 : Une suite ni récurrente ni implicite

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n^2\left(1 + \frac{v_n}{n+1}\right)$.

14. Montrer que si $v_0 \leqslant u_0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant u_n$.

15. En déduire le comportement de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $v_0 < \alpha$.

16. On suppose que $v_0 \geqslant 1$.
   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) En déduire son comportement asymptotique.

Problème II - Polynômes

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit (E_n) l'équation suivante d'inconnue un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$:
$$P(X+2) - P(X) = X^n \qquad \text{et} \qquad P(0) = 0 \qquad\qquad (E_n)$$
On pose également (E) l'équation suivante d'inconnue un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$:
$$P(X+2) - P(X) = 0 \qquad\qquad (E)$$

1. Déterminer avec soin si le polynôme $P = 1$ est une solution d'une des équations (E) ou (E_n), $n \in \mathbb{N}$. Même question pour les polynômes $\frac{X}{2}$ et $\frac{X^2}{2}$.

2. (a) Soit P une solution de (E) telle que $\deg(P) \geqslant 1$. Justifier à l'aide d'un théorème du cours qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$.
   (b) Montrer alors proprement que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha + 2k$ est aussi une racine de P.
   (c) En déduire l'ensemble de solution de (E).

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (E_n) admet au plus une solution.

4. Soit P une solution de (E_n).
   (a) Déterminer une équation vérifiée par $P^{(n+1)}$.
   (b) En déduire que $\deg(P) \leqslant n + 1$.

5. Résoudre (E_1).