Correction du Devoir Maison 7
Suites numériques, polynômes

Du jeudi 16 février

Problème I - Suites numériques

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto x\sqrt{1+\frac{x}{n}}$.

Partie 1 : Une suite récurrente

On pose
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) = f_1(x)^2 = x^2(1+x) = x^2 + x^3.$$
et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = f''(a_n)$.
   La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction polynomiale et
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f'(x) = 2x + 3x^2 \qquad \text{puis} \qquad f''(x) = 2 + 6x.$$
   Donc
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = f''(a_n) = 6a_n + 2.$$
   On reconnaît alors une suite arithmético-géométrique. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On a
   $$\omega = 6\,\omega + 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 5\,\omega = -2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega = -\frac{2}{5}.$$
   Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n - \omega = a_n + \frac{2}{5}$. Dès lors,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_{n+1} = a_{n+1} + \frac{2}{5} = 6a_n + 2 + \frac{2}{5} = 6\left(b_n - \frac{2}{5}\right) + \frac{12}{5} = 6b_n.$$
   Par conséquent, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 6. Ainsi,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = 6^n b_0 = 6^n\left(a_0 + \frac{2}{5}\right) = 6^n\left(1 + \frac{2}{5}\right) = 6^n \times \frac{7}{5}.$$
   Donc,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = b_n - \frac{2}{5} = 6^n \times \frac{7}{5} - \frac{2}{5}.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{7\times 6^n - 2}{5}.}$$
   Vérification : si $n = 0$, $a_0 = \frac{7-2}{5} = 1$. Si $n = 1$, $a_1 = 6a_0 + 2 = 8$ et $\frac{7\times 6^n - 2}{5} = \frac{42-2}{5} = 8$ OK !

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $g(x) = f(x) - x = x^3 + x^2 - x$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction polynomiale et
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f'(x) = 3x^2 + 2x - 1.$$
Soit Δ le discriminant associé : $\Delta = 4 + 4 \times 3 = 4^2$. Donc les racines sont $r_1 = \frac{-2-4}{6} = -1$ et $r_2 = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}$. Donc g' est strictement négative sur $[0; 1/3[$ et strictement positive sur $]1/3; +\infty[$ donc g est strictement décroissante sur $[0; 1/3]$ et strictement croissante sur $[1/3; +\infty[$. De plus, $g(0) = 0$, $g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1+3-9}{27} = -\frac{5}{27}$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	0	$1/3$	$+\infty$
g	0 ↘	$-\frac{5}{27}$	↗ $+\infty$

3. Par ce qui précède, g est strictement croissante $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$ donc notamment sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$. De plus g est continue sur cet intervalle. Enfin, on a $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1+2-4}{8} = -\frac{1}{8} < 0$ et $g(1) = 1 + 1 - 1 = 1 > 0$. Donc $0 \in \left]g\left(\frac{1}{2}\right); g(1)\right[$ donc par le théorème de la bijection,
$$\boxed{\exists! \alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[, \qquad g(\alpha) = 0.}$$

4. Par définition de α, $g(\alpha) = 0$ i.e. $f(\alpha) = \alpha$. Supposons $u_0 = \alpha$ et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = \alpha$ ».

   Initialisation. Si $n = 0$, alors $u_0 = \alpha$ et donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

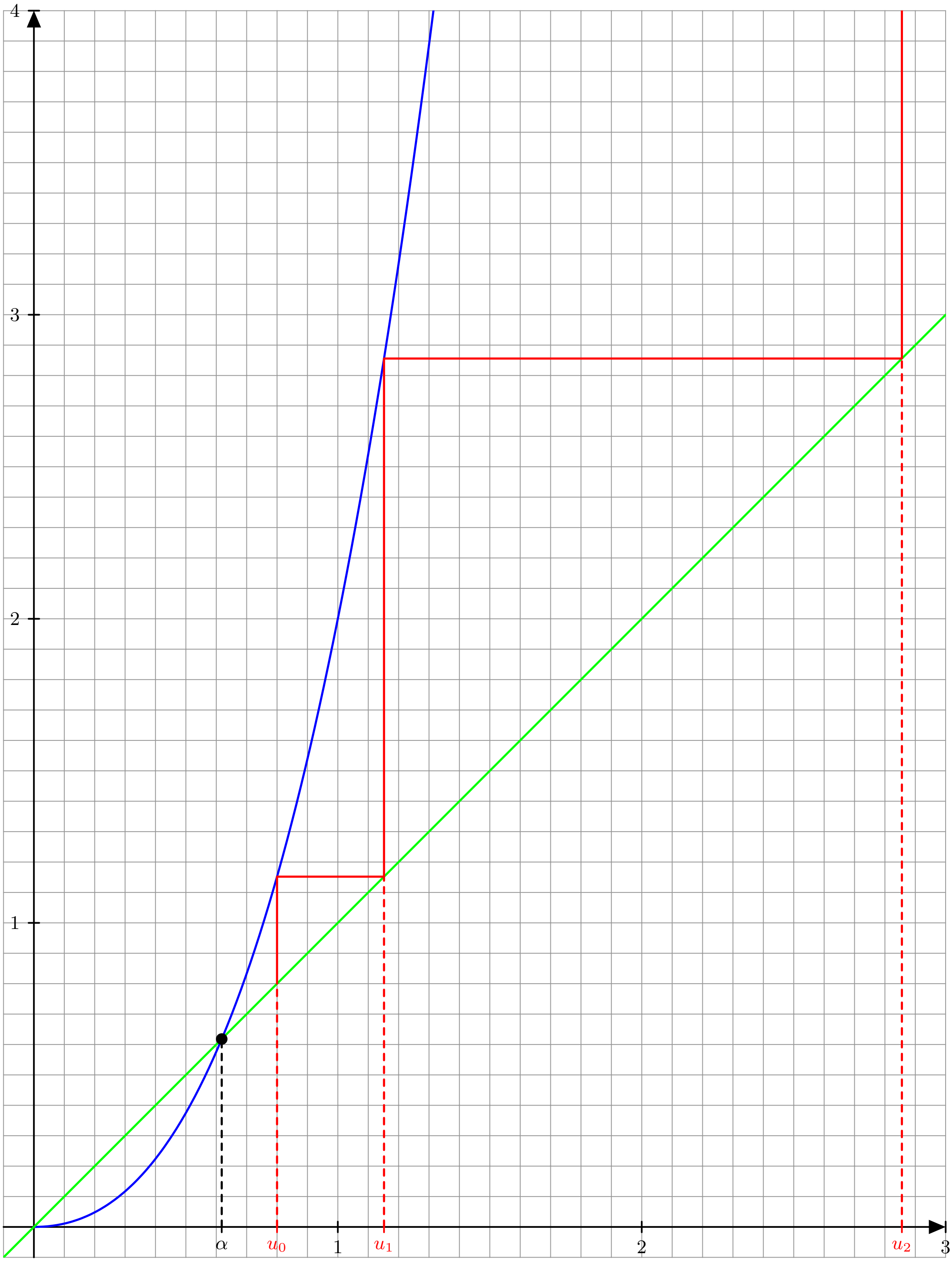
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ i.e. $u_n = \alpha$. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Par définition de la suite, $u_{n+1} = f(u_n)$. Donc par hypothèse de récurrence
$$u_{n+1} = f(\alpha) = \alpha \qquad \text{car } \alpha \text{ point fixe de } f.$$
   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha$ autrement dit
$$\boxed{\text{si } u_0 = \alpha, \text{ alors la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est la suite constante égale à } \alpha.}$$

5. on suppose $u_0 > \alpha$.

   (a) La fonction $f : x \mapsto x^3 + x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de deux fonctions qui le sont. De plus, $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $f(\alpha) = \alpha$. D'après la question 2. on observe que g est strictement négative sur $]0; \alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha; +\infty[$. Donc le graphe de la fonction f est strictement en dessous de celui de la droite $y = x$ sur $]0; \alpha[$ et strictement au dessus sur $]\alpha; +\infty[$.

   On obtient alors



(b) On sait que pour tout $x > \alpha$, on a $g(x) > 0$ i.e. $f(x) > x$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $u_n > \alpha$ ».

Initialisation. Si $n = 0$, alors $u_0 > \alpha$ par hypothèse et donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ i.e. $u_n > \alpha$. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Par définition de la suite, $u_{n+1} = f(u_n)$. Or par hypothèse de récurrence $u_n > \alpha$. Donc en prenant $x = u_n$,

$$f(u_n) > u_n.$$

Autrement dit $u_{n+1} > u_n$. Or $u_n > \alpha$. Donc $u_{n+1} > \alpha$ et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \alpha$ autrement dit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in]\alpha; +\infty[\,.}$$

(c) On sait que pour tout $x > \alpha$, $f(x) > x$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \alpha$. Ainsi, pour $x = u_n$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(u_n) > u_n \;\Leftrightarrow\; u_{n+1} > u_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$$

(d) Procédons par l'absurde. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. Alors $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ en tant que suite extraite. D'autre part par continuité de f sur $\mathbb{R}$ (en tant que fonction polynomiale) on en déduit de la caractérisation séquentielle de la continuité en ℓ que $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Donc par passage à la limite,

$$\ell = f(\ell) \qquad \Leftrightarrow \qquad g(\ell) = 0.$$

Or d'après l'étude de g, on observe que g ne s'annule qu'en 0 et α. Donc

$$\ell = 0 \;\text{ OU }\; \ell = \alpha.$$

Or puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n > u_0.$$

Donc par passage à la limite, *(attention au passage à l'inégalité large !)*

$$\ell \geqslant u_0.$$

Donc $\ell > \alpha > 0$ ce qui est contradictoire. Conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge.}}$$

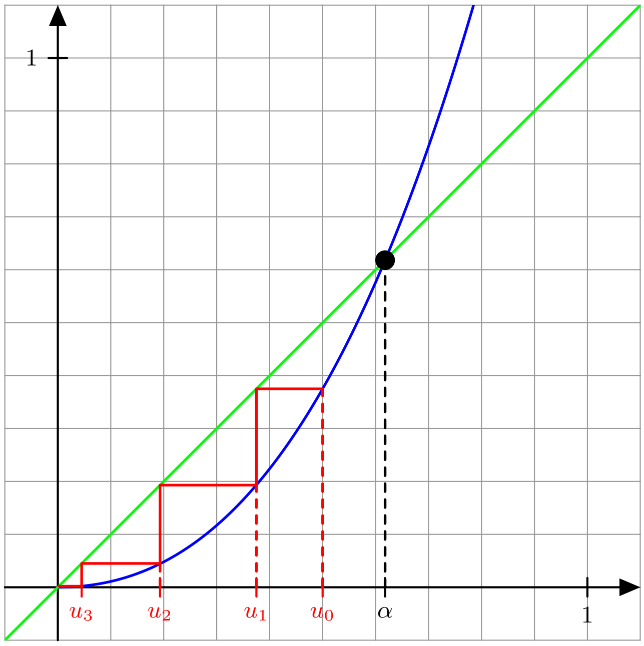
(e) Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, par le théorème de convergence monotone, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- OU converge vers un réel fixé
- OU diverge vers $+\infty$.

Or par la question précédente, on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers un réel fixé. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

6. On suppose que $u_0 < \alpha$. On obtient alors le comportement suivant :



Pour tout $x \in \,]0;\alpha[$, on sait que $g(x) < 0$ et donc $f(x) < x < \alpha$. De plus pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2 + x^3 > 0$. Donc $f(]0;\alpha[) \subseteq]0;\alpha[$. Donc l'intervalle $]0;\alpha[$ est stable par f. Puisque $u_0 \in \,]0;\alpha[$. On montre alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in \,]0;\alpha[\,.$$

Or pour tout $x \in \,]0;\alpha[$, $f(x) < x$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(u_n) < u_n \;\Leftrightarrow\; u_{n+1} < u_n.$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \,]0;\alpha[$ et donc $u_n > 0$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et minorée (par 0) donc par le théorème de convergence monotone,

$$\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Notons ℓ sa limite. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \alpha$, on en déduit par passage à la limite (attention au passage aux inégalités larges)

$$0 \leqslant \ell \leqslant \alpha.$$

Mieux, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant u_0.$$

Donc par passage à la limite, $\ell \leqslant u_0$. Or $u_0 < \alpha$ donc $\ell < \alpha$. De plus, comme précédemment $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$. Donc par unicité de la limite :

$$\ell = f(\ell) \qquad \Leftrightarrow \qquad g(\ell) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = 0 \;\text{ OU }\; \ell = \alpha.$$

Or nous avons établi que $\ell < \alpha$. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

7. On suppose ici que $u_0 \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$.

(a) On sait que f est dérivable sur $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ et $\forall x\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$, $f'(x)=3x^2+2x$. La fonction f' est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ comme somme de fonctions qui le sont et donc

$$\forall x\in\left[0;\frac{1}{4}\right],\qquad 0=f'(0)\leqslant f'(x)\leqslant f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{16}+\frac{2}{4}=\frac{11}{16}.$$

Ainsi, en posant $k=\frac{11}{16}\in\,]0;1[$,

$$\forall x\in\left[0;\frac{1}{4}\right],\qquad |f'(x)|\leqslant\frac{11}{16}.$$

Soit $(x,y)\in\left[0;\frac{1}{4}\right]^2$ tel que $x\neq y$. La fonction f est continue sur $[x;y]$ (ou $[y;x]$), dérivable sur $]x;y[$ (ou $]y;x[$) donc par le théorème des accroissements finis

$$\exists t\in\,]x;y[\text{ (ou }]y;x[)\qquad \frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(t)\ \Leftrightarrow\ f(x)-f(y)=f'(t)\,(x-y)\,.$$

Donc

$$|f(x)-f(y)|=|f'(t)|\,|x-y|\leqslant k\,|x-y|\,,$$

ce qui reste vrai si $x=y$. Conclusion,

$$\boxed{f\text{ est }k\text{-lipschitzienne sur }\left[0;\frac{1}{4}\right]\text{ avec }k=\frac{11}{16}\in\,]0;1[.}$$

(b) On sait que $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\alpha$. Puisque $u_0\in\left]0;\frac{1}{4}\right[$, alors $u_0\in\,]0;\alpha[$. Donc par la question précédente, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et à valeurs dans $]0;\alpha[$. Ainsi,

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad 0<u_n\leqslant u_0<\frac{1}{4}.$$

Donc par la question précédente, en prenant $x=u_n$ et $y=0$, ce qui est légitime car $u_n\in[0;1/4]$ et $0\in[0;1/4]$ *(important !)*, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$|f(u_n)-f(0)|\leqslant k\,|u_n-0|\qquad\Leftrightarrow\qquad |u_{n+1}-0|\leqslant k\,|u_n|\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad |u_{n+1}|\leqslant k\,|u_n|\,.}$$

(c) D'après la question précédente, on montre par récurrence que

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad |u_n|\leqslant k^n\,|u_0|\,.$$

Puisque $k>0$,

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \frac{|u_n|}{k^n}=\left|\frac{u_n}{k^n}\right|\leqslant|u_0|\,.$$

Ainsi, la suite $\left(\frac{u_n}{k^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné i.e.

$$\boxed{u_n\underset{n\to+\infty}{=}O\left(k^n\right).}$$

Or puisque $k\in\,]0;1[$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}k^n=0.$$

Or pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant|u_n|\leqslant k^n\,|u_0|$. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty}|u_n|=0\qquad\Leftrightarrow\qquad\lim_{n\to+\infty}u_n=0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{cela est bien cohérent avec la question 6.}}$$

Partie 2 : Une suite implicite

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0;1]$, on a $1+\frac{x}{n} \geqslant 1 > 0$ et donc $f_n(x)$ existe. Ainsi, f_n est bien définie et même continue sur $[0;1]$. D'autre part, la fonction f_n est strictement croissante sur $[0;1]$ comme produit des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{1+\frac{x}{n}}$ qui le sont sur $[0;1]$. Enfin $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = \sqrt{1+\frac{1}{n}} > \sqrt{1} = 1$. Donc on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1
f_n	0	$\nearrow$	$\sqrt{1+\frac{1}{n}}$

et comme $1 \in \left]0;\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right[=]f_n(0);f_n(1)[$, par le théorème de la bijection, on en déduit que

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe un unique } x_n \in]0;1[\text{ tel que } f_n(x_n) = 1.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Soit $x \in]0;1[$, on a alors, $\frac{x}{n+1} < \frac{x}{n}$ et donc $\sqrt{1+\frac{x}{n+1}} < \sqrt{1+\frac{x}{n}}$. Or $x > 0$, donc

$$f_{n+1}(x) = x\sqrt{1+\frac{x}{n+1}} < x\sqrt{1+\frac{x}{n}} = f_n(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]0;1[\,, \quad f_{n+1}(x) < f_n(x).}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question précédente, $f_{n+1}(x_n) < f_n(x_n)$. Donc par définition de x_n, puis celle de x_{n+1},

$$f_{n+1}(x_n) < 1 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$

Or la fonction f_{n+1} est strictement croissante. Donc $x_n < x_{n+1}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante.}}$$

11. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et majorée par 1 (d'après la question 8.), on en déduit par le théorème de convergence monotone que

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

Notons ℓ sa limite. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n\sqrt{1+\frac{x_n}{n}} = 1$. Puisque $\ell \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\frac{x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \times 0 = 0$. Donc par passage à la limite et continuité en 1 de la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t}$,

$$\ell \times 1 = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\ell = 1.}$$

12. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \ell - x_n = 1 - x_n$ i.e. $x_n = 1 - y_n$. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell = 1$, on en déduit que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n\sqrt{1+\frac{x_n}{n}} = 1$ donc

$$(1-y_n)\sqrt{1+\frac{1-y_n}{n}} = 1.$$

On sait que $\sqrt{1+h} \underset{h\to 0}{=} 1+\frac{h}{2}+o(h)$. Posons $h(n)=\frac{1}{n}-\frac{y_n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ car $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Puis $o(h(n)) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
1 &\underset{n\to+\infty}{=} (1-y_n)\left(1+\frac{h(n)}{2}+o(h(n))\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} (1-y_n)\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-y_n-\frac{y_n}{2n}+o\left(\frac{y_n}{n}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2n}-y_n+o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$y_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.}$$

et on en déduit également que

$$\boxed{x_n = 1-y_n \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

ou encore $\boxed{\alpha=-\frac{1}{2}}$.

13. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $z_n=x_n-1+\frac{1}{2n}$ i.e. $x_n=1-\frac{1}{2n}+z_n$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $x_n\sqrt{1+\frac{x_n}{n}}=1$ et donc

$$1=\left(1-\frac{1}{2n}+z_n\right)\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{z_n}{n}}.$$

On sait que $\sqrt{1+h} \underset{h\to 0}{=} 1+\frac{h}{2}+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}h^2+o\left(h^2\right) \underset{h\to 0}{=} 1+\frac{h}{2}-\frac{1}{8}h^2+o\left(h^2\right)$. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $h(n)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{z_n}{n}$. Observons par la question précédente que

$$z_n = x_n-1+\frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1+\frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc

$$h(n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Puis,

$$\begin{aligned}
h(n)^2 &\underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Enfin, $o\left(h(n)^2\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
1 &\underset{n\to+\infty}{=} \left(1 - \frac{1}{2n} + z_n\right)\left(1 + \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2} - \frac{\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{8} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \left(1 - \frac{1}{2n} + z_n\right)\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \left(1 - \frac{1}{2n} + z_n\right)\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2n} - \frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + v_n + \frac{z_n}{2n} - \frac{3z_n}{8n^2} + o\left(\frac{z_n}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Or $z_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc $\frac{z_n}{2n} - \frac{3z_n}{8n^2} + o\left(\frac{z_n}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
1 &\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2n} - \frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + z_n + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{5}{8n^2} + z_n + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Ou encore

$$z_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{5}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{x_n = 1 - \frac{1}{2n} + z_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + \frac{5}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

et on a donc $\boxed{\beta = \frac{5}{8}}$.

Partie 3 : Une suite ni récurrente ni implicite

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = v_n^2\left(1 + \frac{v_n}{n+1}\right)$.

14. Supposons que $v_0 \leqslant u_0$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $0 < v_n \leqslant u_n$ ».

    Initialisation. Si $n = 0$, par hypothèse, on a $0 < v_0 \leqslant u_0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

    Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Par hypothèse de récurrence, $0 < v_n \leqslant u_n$. Donc par la stricte croissance de la fonction carrée $0 < v_n^2 \leqslant u_n^2$. De plus puisque $n+1 > 0$, on a $0 < \frac{v_n}{n+1} \leqslant \frac{u_n}{n+1} \leqslant u_n$. Ainsi par produit,

    $$0 < v_n^2\left(1 + \frac{v_n}{n+1}\right) \leqslant u_n^2\left(1 + \frac{u_n}{n+1}\right) \leqslant u_n^2\left(1 + u_n\right).$$

    D'où

    $$0 < v_{n+1} \leqslant u_{n+1}.$$

    Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

    Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

    $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 < v_n \leqslant u_n.}$$

15. Supposons $v_0 < \alpha$. Posons $u_0 = \frac{v_0+\alpha}{2}$. Alors $0 < v_0 < u_0 < \alpha$. Donc par la question 6. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ issue de u_0 converge vers 0. Or par la question précédente,

    $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 < v_n \leqslant u_n.$$

    Donc par le théorème d'encadrement, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

    $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0.}$$

16. On suppose que $v_0 \geqslant 1$.

   (a) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $v_n \geqslant 1$ ».
   Initialisation. Si $n = 0$ alors $v_0 \geqslant 1$ et donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors $v_n \geqslant 1$ donc $v_n^2 \geqslant 1$ et $1+\frac{v_n}{n+1} \geqslant 1+\frac{1}{n+1} \geqslant 1$. Ainsi,
   $$v_{n+1} = v_n^2\left(1+\frac{v_n}{n+1}\right) \geqslant 1.$$
   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie i.e. $v_n \geqslant 1$.
   Par suite, on en déduit notamment que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$. Dès lors,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{v_{n+1}}{v_n} = v_n\left(1+\frac{v_n}{n+1}\right) \geqslant 1\left(1+\frac{1}{n+1}\right) > 1.$$
   Puisque $v_n > 0$,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} > v_n.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est (strictement) croissante.}}$$

   (b) Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, par le théorème de convergence monotone, on a deux possibilités :
   - la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel fixé
   - OU la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

   Supposons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel fixé ℓ. Alors par produit,
   $$\frac{v_n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   D'autre part, $v_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ en tant que suite extraite. Ainsi, par passage à la limite dans la relation $v_{n+1} = v_n^2\left(1+\frac{v_n}{n+1}\right)$,
   $$\ell = \ell^2(1+0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = \ell^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = 0 \ \text{ OU } \ \ell = 1.$$
   Or on a
   $$v_1 = v_0^2\left(1+\frac{v_0}{1}\right) = v_0^2(1+v_0) \geqslant 1^2(1+1) = 2.$$
   Et par croissance de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n \geqslant v_1 \geqslant 2.$$
   Donc par passage à la limite,
   $$\ell \geqslant 2 \qquad\qquad \text{ce qui contradictoire avec } \ell = 0 \text{ ou } \ell = 1.$$
   Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger donc par le théorème de convergence monotone,
   $$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$$

Problème II - Polynômes

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit (E_n) l'équation suivante d'inconnue un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P(X+2) - P(X) = X^n \qquad \text{et} \qquad P(0) = 0 \qquad\qquad (E_n)$$

On pose également (E) l'équation suivante d'inconnue un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P(X+2) - P(X) = 0 \qquad\qquad (E)$$

1. - Si $P = 1$, alors $P(X+2) - P(X) = 1 - 1 = 0$ donc

$$\boxed{P = 1 \text{ est une solution de } (E).}$$

   - Si $P = \frac{X}{2}$, alors $P(X+2) - P(X) = \frac{X+2}{2} - \frac{X}{2} = 1 = X^0$. De plus $P(0) = \frac{0}{2} = 0$ et donc

$$\boxed{P = \frac{X}{2} \text{ est une solution de } (E_0).}$$

   - Si $P = \frac{X^2}{2}$, alors $P(X+2) - P(X) = \frac{(X+2)^2}{2} - \frac{X^2}{2} = \frac{2X+4}{2} = X + 2$. Donc

$$\boxed{P = \frac{X^2}{2} \text{ n'est solution d'aucune équation pré-citée.}}$$

2. (a) Soit P une solution de (E) telle que $\deg(P) \geqslant 1$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on sait que P admet une racine complexe. Donc $\boxed{\exists \alpha \in \mathbb{C},\ P(\alpha) = 0}$.

   (b) Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ la propriété « $\alpha + 2k$ est une racine de P ».
   - *Initialisation.* Si $k = 0$ alors $\alpha + 2 \times 0 = \alpha$ est une racine de P d'après la question précédente. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité.* Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Alors $P(\alpha + 2k) = 0$. Or P est une solution de (E) donc en évaluant cette équation en $\alpha + 2k$, on a

$$P(\alpha + 2k + 2) - \underbrace{P(\alpha + 2k)}_{=0} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad P(\alpha + 2(k+1)) = 0$$

     Donc $\alpha + 2(k+1)$ est aussi une racine de P et donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
   - *Conclusion.* Par récurrence, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie i.e.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \alpha + 2k \text{ est une racine de } P.}$$

   (c) D'après les questions précédentes, on a montré que si P est une solution de (E) telle que $\deg(P) \geqslant 1$ alors P admet une infinité de racines distinctes. On en déduit que dans ce cas P est nécessairement le polynôme nul ce qui contredit le fait que $\deg(P) \geqslant 1$. Dès lors les seules solutions possibles de (E) sont les polynômes constants. Réciproquement, soit $P = C$ un polynôme constant, $C \in \mathbb{R}$. Alors $P(X+2) - P(X) = C - C = 0$ et donc tous les polynômes constants sont solutions de (E). Conclusion :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \mathbb{R}_0[X].}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient P et Q deux solutions de (E_n). Alors,

$$\begin{cases} P(X+2) - P(X) = X^n, & P(0) = 0 \\ Q(X+2) - Q(X) = X^n, & Q(0) = 0 \end{cases}$$

On pose $R = P - Q$, par soustraction des deux égalités ci-dessus,

$$R(X+2) - R(X) = 0.$$

Autrement dit R est une solution de (E). Donc d'après la question précédente, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $R = P - Q = C$. En évaluant en 0, on obtient $R(0) = 0 - 0 = C$ et donc $C = 0$ et $P = Q$ ce qui démontre que

$$\boxed{(E_n) \text{ admet au plus une solution.}}$$

4. Soit P une solution de (E_n).

   (a) Par dérivation d'une composée, en posant $Q = P(X+2)$, on a $Q' = 1 \times P'(X+2) = P'(X+2)$ et de même pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Q^{(k)} = P^{(k)}(X+2)$ en particulier $Q^{(n+1)} = P^{(n+1)}(X+2)$. De même la dérivée $n+1$-ième de $P(X) = P$ est bien $P^{(n+1)}(X)$. Donc en dérivant $n+1$ fois l'égalité $P(X+2) - P(X) = X^n$, on obtient que

   $$P^{(n+1)}(X+2) - P^{(n+1)}(X) = 0.$$

   Ainsi

   $$\boxed{P^{(n+1)} \text{ est une solution de } (E).}$$

   (b) D'après la question précédente et la question 2, on sait que $P^{(n+1)}$ est un polynôme constant et donc nécessairement $\boxed{\deg(P) \leqslant n+1}$.

5. D'après la question précédente, on sait que si P est une solution de (E_1) alors $\deg(P) \leqslant 2$. Soient $(a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^3$ et $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& P \text{ est solution de } (E_1) \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} a_0 + a_1(X+2) + a_2(X+2)^2 - \left(a_0 + a_1 X + a_2 X^2\right) = X \\ \text{et} \quad a_0 + a_1 \times 0 + a_2 \times 0^2 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & a_0 = 0 \quad \text{et} \quad a_1 X + 2a_1 + a_2 X^2 + 4a_2 X + 4a_2 - a_1 X - a_2 X^2 = X \\
\Leftrightarrow \quad & a_0 = 0 \quad \text{et} \quad 4a_2 X + 2a_1 + 4a_2 = X.
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme,

$$\begin{aligned}
P \text{ est solution de } (E_1) \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ 4a_2 = 1 \\ 2a_1 + 4a_2 = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 = \frac{1}{4} \\ a_1 = -2a_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad P = \frac{X^2 - 2X}{4}.
\end{aligned}$$

Finalement, l'unique solution de (E_1) est

$$\boxed{P = \frac{X^2 - 2X}{4}.}$$