Devoir Maison 8
Espaces vectoriels et séries numériques

A faire pour le jeudi 9 mars

Problème I - Espaces vectoriels

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Dans E^2, on considère l'application suivante :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \quad E^2 \to \mathbb{R}$$
$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k).$$

Définition I.1

Soient $(P, Q) \in E^2$, on dit que P et Q sont orthogonaux si et seulement si

$$\langle P, Q \rangle = 0_{\mathbb{R}}.$$

Définition I.2

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On définit l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F par

$$F^{\perp} = \{ P \in E \mid \forall Q \in F,\ \langle P, Q \rangle = 0_{\mathbb{R}} \}.$$

Dans la suite F désigne un sous-espace vectoriel de E. On note $p = \dim(F)$.

Partie 1 : L'orthogonal d'un espace vectoriel

1. Calculer $\langle 1, X \rangle$ et $\left\langle (X-1)^2, X \right\rangle$. *On mettra les résultats sous forme factorisée.*
2. Soit $P_0 \in E$. Montrer que l'ensemble des polynômes orthogonaux à P_0 :
$$G(P_0) = \{ P \in E \mid \langle P, P_0 \rangle = 0_{\mathbb{R}} \},$$
est un espace vectoriel.
3. On suppose dans cette question que $n = 2$.
   (a) Déterminer la dimension de $G(1)$.
   (b) Même question pour $G(X)$.
   (c) Les espaces $G(1)$ et $G(X)$ sont-ils en somme directe ? Sont-ils supplémentaires ?
   (d) Déterminer un supplémentaire de $G(1)$.
4. Montrer que $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.
5. Soit $P \in E$. Montrer que le seul polynôme orthogonal à lui même est le polynôme nul :
$$\langle P, P \rangle = 0_{\mathbb{R}} \quad \Leftrightarrow \quad P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}.$$
6. En déduire que $E^{\perp} = \{0_E\}$.

7. Déterminer $\{0_E\}^{\perp}$.

8. Déduire de la question 5. que F et $F^{\perp}$ sont en somme directe.

9. Notons $p = \dim(F)$. En déduire un majorant de la dimension de $F^{\perp}$.

10. On suppose $p \geqslant 1$. On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. Montrer par double inclusion que

$$F^{\perp} = \{ P \in E \mid \forall i \in [\![1;p]\!],\ \langle P, e_i \rangle = 0_{\mathbb{R}} \}.$$

11. On suppose dans cette question que $n = 2$ et $F = \mathrm{Vect}(1)$.
    (a) Déduire de la question précédente $F^{\perp}$.
    (b) Montrer que F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.
    Ce résultat est général, on a toujours F et $F^{\perp}$ supplémentaires… en dimension finie ! En dimension infinie il existe des cas où cela ne marche pas.
    (c) Calculer puis reconnaitre $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ car il est bilinéaire : linéaire par rapport à la première variable P et à la seconde variable Q, symétrique : $\forall (P,Q) \in E^2$, $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$, positif : $\langle P, P \rangle \geqslant 0_{\mathbb{R}}$ et défini (c'est le résultat de la question 5.). L'espace $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est alors un espace euclidien.

Partie 2 : Les polynômes de Lagrange

Pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, on pose

$$L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (X - k).$$

On considère alors la famille $\mathscr{L} = (L_0, \ldots, L_n)$.

12. Soit $i \in [\![0;n]\!]$.
    (a) Quel est le degré de L_i ?
    (b) Préciser pour tout $j \in [\![0;n]\!]$ et $j \neq i$, $L_i(j)$.
    (c) Quelles sont les racines de L_i ? Leur multiplicité ?
    (d) Montrer que $\langle L_i, L_i \rangle = L_i(i)^2$.

13. Pour tout $(i,j) \in [\![0;n]\!]$, $i \neq j$, montrer que L_i et L_j sont orthogonaux.

14. Montrer que $\mathscr{L}$ est libre.

15. En déduire que $\mathscr{L}$ est une base de E.

16. (a) Soit $P \in E$ et $Q = P - \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{P(i)}{L_i(i)} L_i$. Montrer que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $Q(k) = 0$.
    (b) En déduire les coordonnées de P dans $\mathscr{L}$.

17. Application : si $n = 2$, préciser $\mathscr{L}$ puis déterminer l'unique parabole passant par les points $(0;2)$, $(1;0)$ et $(2;1)$.

Problème II - Etude d'une suite implicite par les séries

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = \frac{1}{4}, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

On considère également la fonction f définie sur $[0;1]$ par

$$f \quad : \quad \begin{array}{l} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x - x^2. \end{array}$$

1. (a) Déterminer le tableau de variation de f.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+4}.$$
   (c) Préciser la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Peut-on en déduire la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$?
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$.
3. Soit $x \in [0;1[$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n$.
4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$.
   (a) Montrer que qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant n_0$,
   $$a_{n+1} \geqslant a_n \frac{\ell+1}{2}.$$
   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant n_0$,
   $$a_n \geqslant a_{n_0} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0}.$$
   (c) Déterminer alors la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.
5. Soit $x \in]1;+\infty[$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n$ diverge.
6. (a) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
   (b) En déduire la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
7. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = nu_n$.
   (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$w_{n+1} - w_n = u_n \left(1 - (n+1)\, u_n\right).$$
   (b) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On notera ω sa limite.
   (c) Justifier que $\omega \neq 0$ et en déduire un équivalent de u_n.
   (d) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (w_{n+1} - w_n)$ et en déduire que $\omega = 1$.