Correction du Devoir Maison 8
Espaces vectoriels et séries numériques

Du jeudi 09 mars

Problème I - Espaces vectoriels

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Dans E^2, on considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle \ : \quad & E^2 \to \mathbb{R} \\ & (P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k). \end{aligned}$$

Définition I.1

Soient $(P, Q) \in E^2$, on dit que P et Q sont orthogonaux si et seulement si

$$\langle P, Q \rangle = 0_{\mathbb{R}}.$$

Définition I.2

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On définit l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F par

$$F^{\perp} = \{ P \in E \mid \forall Q \in F,\ \langle P, Q \rangle = 0_{\mathbb{R}} \}.$$

Dans la suite F désigne un sous-espace vectoriel de E. On note $p = \dim(F)$.

Partie 1 : L'orthogonal d'un espace vectoriel

1. Par définition,

$$\langle 1, X \rangle = \sum_{k=0}^{n} 1 \times k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

De même,

$$\begin{aligned} \left\langle (X-1)^2, X \right\rangle &= \sum_{k=0}^{n} (k-1)^2 k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(k^3 - 2k^2 + k\right) \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{12}\left(3n^2 + 3n - 8n - 4 + 6\right) \\ &= \frac{n(n+1)\left(3n^2 - 5n + 2\right)}{12} \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)(3n-2)}{12}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\langle 1, X \rangle = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \left\langle (X-1)^2, X \right\rangle = \frac{n(n+1)(n-1)(3n-2)}{12}.}$$

2. Soit $P_0 \in E$. On pose
$$G(P_0) = \{ P \in E \mid \langle P, P_0 \rangle = 0_{\mathbb{R}} \},$$
Montrons que $G(P_0)$ est un sous-espace vectoriel de E. On observe les points suivants.

- $G(P_0) \subseteq E$ par définition.
- Si $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Alors, on a
$$\langle P, P_0 \rangle = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{P(k)}_{=0_{\mathbb{R}}} P_0(k) = 0_{\mathbb{R}}.$$
Donc $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \in G(P_0)$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in G(P_0)^2$. Donc par définition,
$$\langle P, P_0 \rangle = \langle Q, P_0 \rangle = 0.$$
Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Par suite,
$$\begin{aligned}
\langle R, P_0 \rangle &= \sum_{k=0}^{n} R(k) P_0(k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (\lambda P(k) + \mu Q(k)) P_0(k) \\
&= \lambda \sum_{k=0}^{n} P(k) P_0(k) + \mu \sum_{k=0}^{n} Q(k) P_0(k) \\
&= \lambda \langle P, P_0 \rangle + \mu \langle Q, P_0 \rangle \\
&= 0 \qquad \text{car } P \in G(P_0) \text{ et } Q \in G(P_0).
\end{aligned}$$
Donc $R = \lambda P + \mu Q \in G(P_0)$ et $G(P_0)$ est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, $G(P_0)$ est un sous-espace vectoriel de E et donc
$$\boxed{G(P_0) \text{ est un espace vectoriel.}}$$

3. On suppose dans cette question que $n = 2$.

   (a) Soit $P \in E = \mathbb{R}_2[X]$. Alors il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$. On a alors les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
P \in G(1) \quad &\Leftrightarrow \quad \langle P, 1 \rangle = 0_{\mathbb{R}} \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{2} P(k) \times 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad P(0) + P(1) + P(2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a_0 + a_0 + a_1 + a_2 + a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 3a_0 + 3a_1 + 5a_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a_0 = -a_1 - \frac{5}{3} a_2 \\
&\Leftrightarrow \quad P = a_2 X^2 + a_1 X - a_1 - \frac{5}{3} a_2 = \frac{a_2}{3} \left(3X^2 - 5 \right) + a_1 (X - 1).
\end{aligned}$$
   Ainsi,
$$G(1) = \text{Vect} \underbrace{\left(3X^2 - 5, X - 1 \right)}_{= \mathscr{B}_1}$$

La famille $\mathscr{B}_1$ est donc génératrice de $G(1)$. De plus $\mathscr{B}_1$ est constituée de deux polynômes de degrés distincts (ou non colinéaires) donc $\mathscr{B}_1$ est libre. Donc $\mathscr{B}_1$ est une base de $G(1)$. Conclusion,

$$\boxed{\dim(G(1)) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_1) = 2.}$$

(b) Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
P \in G(X) \quad &\Leftrightarrow \quad \langle P, X\rangle = 0_{\mathbb{R}} \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{2} P(k) \times k = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 + P(1) + 2P(2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a_0 + a_1 + a_2 + 2a_0 + 4a_1 + 8a_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 3a_0 + 5a_1 + 9a_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a_0 = -\frac{5}{3}a_1 - 3a_2 \\
&\Leftrightarrow \quad P = a_2X^2 + a_1X - \frac{5}{3}a_1 - 3a_2 = a_2\left(X^2-3\right) + \frac{a_1}{3}(X-5).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$G(X) = \mathrm{Vect}\underbrace{\left(X^2-3, X-5\right)}_{=\mathscr{B}_X}$$

La famille $\mathscr{B}_X$ est donc génératrice de $G(X)$. De plus $\mathscr{B}_X$ est constituée de deux polynômes de degrés distincts (ou non colinéaires) donc $\mathscr{B}_X$ est libre. Donc $\mathscr{B}_X$ est une base de $G(X)$. Conclusion,

$$\boxed{\dim(G(X)) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_X) = 2.}$$

(c) On observe que $\dim(G(1)) + \dim(G(X)) = 2 + 2 = 4$. D'autre part, $G(1) + G(X)$ est un sous-espace vectoriel de E donc $\dim(G(1) + G(X)) \leqslant \dim(E) = 3 < 4$ donc

$$\dim(G(1)) + \dim(G(X)) \neq \dim(G(1) + G(X)).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les espaces } G(1) \text{ et } G(X) \text{ ne sont pas en somme directe.}}$$

Et donc a fortiori

$$\boxed{\text{les espaces } G(1) \text{ et } G(X) \text{ ne sont pas supplémentaires.}}$$

(d) On observe que dans $G(1)$ il nous manque le degré 0. Posons $H = \mathrm{Vect}(1)$ et $\mathscr{B}_H = (1)$. $\mathscr{B}_H$ est génératrice de H et est libre car constituée d'un seul vecteur non nul. Donc $\mathscr{B}_H$ est une base de H.

- Posons $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_H) = \left(3X^2 - 5, X - 1, 1\right)$. La famille $\mathscr{B}$ est une famille de polynômes de degrés distincts donc $\mathscr{B}$ est libre. Or $\mathscr{B}_1$ base de $G(1)$ et $\mathscr{B}_H$ base de H. Donc par le théorème de la base adaptée, $G(1)$ et H sont en somme directe.
- De plus, on a vu que $\dim(G(1)) = 2$ et $\dim(H) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_H) = 1$ car $\mathscr{B}_H$ base de H. Donc $\dim(G(1)) + \dim(H) = 3 = \dim(E)$.

Conclusion,

$$\boxed{H = \mathrm{Vect}(1) \text{ est un supplémentaire de } G(1).}$$

NB : H est aussi un supplémentaire de $G(X)$. Pourtant $G(X) \neq G(1)$. En effet $X - 1 \in G(1)$ et pourtant,

$$\langle X-1, X\rangle = \sum_{k=0}^{2}(k-1)k = 0 + 0 + 1 \times 2 = 2 \neq 0.$$

Donc $X - 1 \notin G(X)$.

4. On observe les points suivants.

   - $F^\perp \subseteq E$ par définition.
   - Soit $P = 0_E = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Alors pour tout $Q \in F$, on a
   $$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{P(k)}_{=0_\mathbb{R}} Q(k) = 0_\mathbb{R}.$$
   Donc $0_E \in F^\perp$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P_1, P_2) \in \left(F^\perp\right)^2$. Alors,
   $$\forall Q \in F, \qquad \langle P_1, Q\rangle = \langle P_2, Q\rangle = 0_\mathbb{R}.$$
   Posons $P_3 = \lambda P_1 + \mu P_2$. Soit $Q \in F$, on a
   $$\begin{aligned}\langle P_3, Q\rangle &= \sum_{k=0}^{n} P_3(k)Q(k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\lambda P_1(k) + \mu P_2(k)\right) Q(k)\\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n} P_1(k)Q(k) + \mu \sum_{k=0}^{n} P_2(k)Q(k)\\ &= 0 \qquad\qquad \text{car } P_1 \in F^\perp \text{ et } P_2 \in F^\perp.\end{aligned}$$
   Ceci étant vrai pour tout $Q \in F$, on en déduit que $P_3 = \lambda P_1 + \mu P_2 \in F^\perp$. Donc $F^\perp$ est stable par combinaisons linéaires.

   Conclusion,
   $$\boxed{F^\perp \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

5. Soit $P \in E$. On a les équivalences suivantes :
   $$\langle P, P\rangle = 0_\mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n} P(k)P(k) = 0_\mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n} P(k)^2 = 0_\mathbb{R}.$$
   Or pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $P(k)^2$ est un réel positif et la somme de nombres positifs fait 0 si et seulement si tous les nombres sont nuls. Ainsi,
   $$\langle P, P\rangle = 0_\mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall k \in [\![0; n]\!], \qquad P(k)^2 = 0_\mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall k \in [\![0; n]\!], \qquad P(k) = 0_\mathbb{R}.$$
   Donc $0, 1, 2, \dots, n$ sont n racines de P. Donc P possède $n+1$ racines distinctes. Or P est de degré inférieur ou égal à n. Nécessairement $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Réciproquement, si $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, alors P s'annule en $0, 1, 2, \dots, n$. Conclusion,
   $$\boxed{\langle P, P\rangle = 0_\mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}.}$$

6. Puisque E est un sous-espace vectoriel de lui-même, d'après la question 4. $E^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. Donc $\{0_E\} \subseteq E^\perp$. Réciproquement, soit $P \in E^\perp$. Alors,
   $$\forall Q \in E, \qquad \langle P, Q\rangle = 0.$$
   En particulier, en prenant $Q = P$, on a $\langle P, P\rangle = 0$. Donc par la question précédente, $P = 0_E$. Ceci étant vrai pour tout $P \in P^\perp$, on en déduit que $E^\perp \subseteq \{0_E\}$. Par double inclusion,
   $$\boxed{E^\perp = \{0_E\}.}$$

7. Soit $P \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P \in \{0_E\}^{\perp} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall Q \in \{0_E\}, \qquad \langle P, Q\rangle = 0_{\mathbb{R}} \\ &\Leftrightarrow \quad \langle P, 0_E\rangle = 0_{\mathbb{R}} \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} P(k) \times 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}} \\ &\Leftrightarrow \quad 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}} \qquad \text{toujours vraie.} \end{aligned}$$

Donc l'assertion initiale est vraie pour tout $P \in E$. Conclusion,

$$\boxed{\{0_E\}^{\perp} = E.}$$

8. Soit $P \in F \cap F^{\perp}$. Alors d'une part $P \in F$ et d'autre part,

$$\forall Q \in F, \qquad \langle P, Q\rangle = 0_{\mathbb{R}}.$$

Puisque $P \in F$, on peut prendre $Q = P$ et donc

$$\langle P, P\rangle = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc par la question 5. $P = 0_E$. Ainsi, $F \cap F^{\perp} \subseteq \{0_E\}$. Or on a aussi $\{0_E\} \subseteq F \cap F^{\perp}$ car $F \cap F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel. Donc $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Les espaces } F \text{ et } F^{\perp} \text{ sont en somme directe.}}$$

9. Notons $p = \dim(F)$. Puisque F et $F^{\perp}$ sont en somme directe on sait que

$$\begin{aligned} & \dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) = \dim\left(F + F^{\perp}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & \dim\left(F^{\perp}\right) = \dim\left(F + F^{\perp}\right) - \dim(F) = \dim\left(F + F^{\perp}\right) - p. \end{aligned}$$

Or $F + F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E. Donc $\dim\left(F + F^{\perp}\right) \leqslant \dim(E) = n+1$. Ainsi,

$$\boxed{\dim\left(F^{\perp}\right) \leqslant n + 1 - p.}$$

10. On suppose $p \geqslant 1$. On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. Montrons que

$$F^{\perp} = \{\, P \in E \mid \forall i \in [\![1;p]\!],\ \langle P, e_i\rangle = 0_{\mathbb{R}} \,\}.$$

Notons $F' = \{\, P \in E \mid \forall i \in [\![1;p]\!],\ \langle P, e_i\rangle = 0_{\mathbb{R}} \,\}$.
Soit $P \in F^{\perp}$. Alors par définition,

$$\forall Q \in F, \qquad \langle P, Q\rangle = 0_{\mathbb{R}}.$$

Si cela est vrai pour tout polynôme $Q \in F$, cela est notamment vrai pour les polynômes e_i car $\mathscr{B}$ est une base de F et donc une famille de polynômes de F : $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $e_i \in F$. Donc

$$\forall i \in [\![1;p]\!],\ \langle P, e_i\rangle = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $P \in F'$. Ainsi, $F^{\perp} \subseteq F'$.

Réciproquement, soit $P \in F'$. Donc

$$\forall i \in [\![1;p]\!],\ \langle P, e_i\rangle = 0_{\mathbb{R}}.$$

Soit $Q \in F$. Puisque $\mathscr{B}$ est une base de F, elle est notamment génératrice dans F :

$$F = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)\,.$$

Donc il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$Q = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, e_i.$$

Les λ_i sont les coordonnées de Q dans la base $\mathscr{B}$.

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\langle P, Q\rangle &= \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(P(k) \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, e_i(k) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left(\sum_{k=0}^{n} P(k) e_i(k) \right) && \text{car la somme est rectangulaire} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \quad \underbrace{\langle P, e_i\rangle}_{=0 \text{ car } P \in F'} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\forall Q \in F,\ \langle P, Q\rangle = 0$. Donc $P \in F^{\perp}$. Ceci étant vrai pour tout $P \in F'$, on obtient bien $F' \subseteq F^{\perp}$.

Par double inclusion, on conclut que

$$\boxed{F^{\perp} = F' = \{\, P \in E \mid \forall i \in [\![1;p]\!],\ \langle P, e_i\rangle = 0_{\mathbb{R}} \,\}\,.}$$

11. On suppose dans cette question que $n = 2$ et $F = \text{Vect}\,(1)$.

   (a) Puisque $\mathscr{B}_F = (1)$ engendre F et est une famille libre (car possède un seul vecteur non nul), on en déduit que $\mathscr{B}_F$ est une base de F. Donc par la question précédente,

   $$F^{\perp} = \{\, P \in E \mid \langle P, 1\rangle = 0 \,\}\,.$$

   Donc avec les notations précédentes, $F^{\perp} = G\,(1)$. Conclusion, par ce qui précède,

   $$\boxed{F^{\perp} = G\,(1) = \text{Vect}\left(3X^2 - 5, X - 1\right).}$$

   (b) On a déjà vu à la question 3.d que $H = \text{Vect}\,(1) = F$ est un supplémentaire de $G\,(1) = F^{\perp}$. Conclusion,

   $$\boxed{F \text{ et } F^{\perp} \text{ sont supplémentaires.}}$$

   Ce résultat est général, on a toujours F et $F^{\perp}$ supplémentaires... en dimension finie ! En dimension infinie il existe des cas où cela ne marche pas.

   (c) On a vu que $\mathscr{B}_1 = \left(3X^2 - 5, X - 1\right)$ est une base de $G\,(1)$ et donc de $F^{\perp}$. Donc par la question 10.

   $$\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = \left\{\, P \in E \mid \left\langle P, 3X^2 - 5\right\rangle = \langle P, X - 1\rangle = 0 \,\right\}.$$

Soient $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
P \in \left(F^{\perp}\right)^{\perp} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \langle P, 3X^2-5\rangle = 0 \\ \langle P, X-1\rangle = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(0)\times(-5) + P(1)\times(-2) + P(2)\times 7 = 0 \\ P(0)\times(-1) + P(1)\times 0 + P(2)\times 1 = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -5a_0 - 2a_0 - 2a_1 - 2a_2 + 7a_0 + 14a_1 + 28a_2 = 0 \\ -a_0 + a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 12a_1 + 26a_2 = 0 \\ 2a_1 + 4a_2 = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6a_1 + 13a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \end{matrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 6L_2 \\
& \Leftrightarrow \quad a_2 = a_1 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad P = a_0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(1) = F.}$$

Ce résultat $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$ est aussi général... en dimension finie seulement ! Il existe dans cas en dimension infinie où cela ne marche pas !

On dit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ car il est bilinéaire : linéaire par rapport à la première variable P et à la seconde variable Q, symétrique : $\forall\,(P,Q) \in E^2$, $\langle P, Q\rangle = \langle Q, P\rangle$, positif : $\langle P, P\rangle \geqslant 0_{\mathbb{R}}$ et défini (c'est le résultat de la question 5.). L'espace $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est alors un espace euclidien.

Partie 2 : Les polynômes de Lagrange

Pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, on pose

$$L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (X-k)\,.$$

On considère alors la famille $\mathscr{L} = (L_0, \ldots, L_n)$.

12. Soit $i \in [\![0;n]\!]$.

(a) On a directement,

$$\deg(L_i) = \deg\left(\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (X-k)\right) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \deg(X-k) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} 1 = n+1-1 = n.$$

Conclusion, $\boxed{\deg(L_i) = n}$.

(b) Soit $j \in [\![0;n]\!]$, $j \neq i$. Alors,

$$L_i(j) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (j-k) = (j-j) \times \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i \\ k\neq j}}^{n} (j-k) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall j \in [\![0;n]\!],\ j \neq i, \qquad L_i(j) = 0.}$$

(c) Puisque L_i est scindé et sous forme factorisée, on observe directement que

$$\boxed{\text{l'ensemble des racines de } L_i \text{ est } \{0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}}$$

de plus

$$\boxed{\text{toutes ces racines sont simples.}}$$

(d) On a

$$\langle L_i, L_i \rangle = \sum_{k=0}^{n} L_i^2(k) = 0 + L_i^2(i) + 0 \qquad \text{car d'après 12.b si } k \neq i,\ L_i(k) = 0$$

Donc on a bien

$$\boxed{\langle L_i, L_i \rangle = L_i(i)^2.}$$

13. Soit $(i,j) \in [\![0;n]\!]$, $i \neq j$. On a

$$\langle L_i, L_j \rangle = \sum_{k=0}^{n} L_i(k) L_j(k) = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} L_i(k) L_j(k) + L_i(i) L_j(i).$$

Or d'après 12.b, pour tout $k \neq i$, $L_i(k) = 0$. Donc

$$\langle L_i, L_j \rangle = L_i(i) L_j(i).$$

Or, toujours d'après 12.b, puisque $i \neq j$, $L_j(i) = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\langle L_i, L_j \rangle = 0 \text{ i.e. } L_i \text{ et } L_j \text{ sont orthogonaux.}}$$

14. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0_{\mathbb{R}_n[X]}.$$

Alors en évaluant en $k \in [\![0;n]\!]$, on a

$$0_{\mathbb{R}} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(k) = \lambda_k L_k(k), \qquad \text{car pour tout } i \neq k,\ L_i(k) = 0.$$

Or k n'est pas une racine de L_k car $k \notin \{0, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\}$. Donc $L_k(k) \neq 0$. Ainsi

$$\lambda_k = 0.$$

Ceci étant vrai pour $k \in [\![0;n]\!]$ quelconque. On en déduit que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{L} \text{ est libre.}}$$

15. Par la question précédente, $\mathscr{L}$ est libre. De plus on a

$$\operatorname{Card}(\mathscr{L}) = n + 1 = \dim(E).$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{L} \text{ est une base de } E.}$$

La dimension, c'est béton !

16. (a) Soit $P \in E$ et $Q = P - \sum_{i=0}^{n} \frac{P(i)}{L_i(i)} L_i$. On peut remarquer que puisque i n'est pas une racine de L_i, $L_i(i) \neq 0$ et Q est bien défini. De plus pour tout $k \in [\![0;n]\!]$,

$$\begin{aligned} Q(k) &= P(k) - \sum_{i=0}^{n} \frac{P(i)}{L_i(i)} L_i(k) \\ &= P(k) - \frac{P(k)}{L_k(k)} L_k(k) - \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \frac{P(i)}{L_i(i)} \underbrace{L_i(k)}_{=0} \qquad \text{par 12.b} \\ &= P(k) - P(k) - 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in [\![0;n]\!], \qquad Q(k) = 0.}$$

(b) Avec les notations de la question précédente, on remarque que 0, 1, 2, ..., n sont des racines de Q. Donc Q possède au moins $n+1$ racines. Or $Q \in E = \mathbb{R}_n[X]$. Donc Q est de degré au plus n. Ainsi, on en déduit que $Q = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Autrement dit,

$$P = \sum_{i=0}^{n} \frac{P(i)}{L_i(i)} L_i.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les coordonnées de } P \text{ dans la base } \mathscr{L} \text{ sont donnés par } \left(\frac{P(0)}{L_0(0)}, \frac{P(1)}{L_1(1)}, \ldots, \frac{P(n)}{L_n(n)} \right).}$$

17. Application : si $n = 2$, on a

$$L_0 = (X-1)(X-2) \qquad \text{et} \qquad L_1 = X(X-2) \qquad \text{et} \qquad L_2 = X(X-1).$$

Donc

$$\boxed{\mathscr{L} = ((X-1)(X-2), X(X-2), X(X-1)).}$$

Soit $\mathscr{P}$ la parabole passant par $(0;2)$, $(1;0)$ et $(2;1)$. La parabole $\mathscr{P}$ est décrite par une fonction polynomiale de degré 2. Notons f cette fonction et notons P le polynôme associé. $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Donc par la question précédente

$$P = \sum_{i=0}^{2} \frac{P(i)}{L_i(i)} L_i = \frac{P(0)}{2} (X-1)(X-2) + \frac{P(1)}{-1} X(X-2) + \frac{P(2)}{2} X(X-1).$$

Or par construction de la parabole, $P(0) = 2$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 1$. Donc

$$P = (X-1)(X-2) + \frac{1}{2} X(X-1) = X^2 - 3X + 2 + \frac{1}{2} X^2 - \frac{1}{2} X = \frac{3}{2} X^2 - \frac{7}{2} X + 2.$$

Conclusion, la parabole recherchée a pour équation cartésienne :

$$\boxed{y = \frac{3}{2} x^2 - \frac{7}{2} x + 2.}$$

Puissant non ?!

Problème II - Etude d'une suite implicite par les séries

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = \frac{1}{4}, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

On considère également la fonction f définie sur $[0;1]$ par

$$f \quad : \quad \begin{array}{l} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x - x^2. \end{array}$$

1. (a) La fonction f étant polynomiale sur $[0;1]$ est dérivable sur $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$,

$$f'(x) = 1 - 2x.$$

En particulier, pour $x \in [0;1]$, on a les équivalences suivantes

$$f'(x) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 \geqslant 2x \qquad \Leftrightarrow \qquad x \leqslant \frac{1}{2}.$$

De plus $f(0) = f(1) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

(b) On procède par récurrence. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{P}_n \qquad \text{« } 0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+4} \text{ ».}$$

Initialisation. Si $n = 0$ alors $u_0 = \frac{1}{4}$ et donc on a bien $0 < u_0 \leqslant \frac{1}{4}$ i.e. $\mathscr{P}_0$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons alors que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. On sait que $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+4} \leqslant \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2}$. Or d'après la question précédente, la fonction f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ donc

$$f(0) < f(u_n) \leqslant f\left(\frac{1}{n+4}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 < u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+4} - \frac{1}{(n+4)^2} = \frac{n+4-1}{(n+4)^2} = \frac{n+3}{(n+4)^2}.$$

Comparons $\frac{n+3}{(n+4)^2}$ à $\frac{1}{n+5}$. On a les équivalence suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{n+3}{(n+4)^2} \leqslant \frac{1}{n+5} \qquad &\Leftrightarrow \qquad (n+3)(n+5) \leqslant (n+4)^2 \qquad \text{car } n+5 > 0 \text{ et } (n+4)^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad n^2 + 8n + 15 \leqslant n^2 + 8n + 16 \\ &\Leftrightarrow \qquad 15 \leqslant 16. \end{aligned}$$

La dernière assertion étant toujours vraie, on en déduit que $\frac{n+3}{(n+4)^2} \leqslant \frac{1}{n+5}$ et donc par transitivité,

$$0 < u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+5}.$$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.
Finalement on a bien montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+4}.}$$

(c) D'après la question précédente et le théorème d'encadrement, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ne diverge donc pas grossièrement mais

$$\boxed{\text{on ne peut conclure à cette étape de sa convergence ou non}}$$

(et l'inégalité précédente n'est pas assez précise pour utiliser le théorème de comparaison).

2. Par la question 1.(b) et stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 < u_n^2 \leqslant \frac{1}{(n+4)^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2 \text{ converge.}}$$

3. Soit $x \in [0;1[$. Par la question 1.(b), puisque $x \geqslant 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant u_n x^n \leqslant \frac{x^n}{n+4} \leqslant x^n.$$

Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ converge en tant que série géométrique de raison $x \in [0;1[$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n \text{ converge.}}$$

4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$.

(a) Puisque $\ell = \frac{\ell+\ell}{2} > \frac{\ell+1}{2}$. Par définition de la limite, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{\ell+1}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est strictement positif. Donc $a_{n+1} \geqslant a_n \frac{\ell+1}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad a_{n+1} \geqslant a_n \frac{\ell+1}{2}.}$$

(b) On pose pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}_n$ la propriété « $a_n \geqslant a_{n_0} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0}$ ». Montrons que $\mathscr{P}_n$ est vraie par récurrence.
Initialisation. Si $n = n_0$ alors, $a_{n_0} = a_{n_0} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n_0-n_0}$ et donc $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geqslant n_0$. Supposons que $\mathscr{P}_n$ soit vraie. Alors par la question précédente (car $n \geqslant n_0$) puis l'hypothèse de récurrence,

$$a_{n+1} \underset{Q4.(b)}{\geqslant} a_n \frac{\ell+1}{2} \underset{H.R.}{\geqslant} a_{n_0} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} \frac{\ell+1}{2} = a_{n_0} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n+1-n_0}.$$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion. Pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.
On a donc montré que

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0, \quad a_n \geqslant a_{n_0} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0}.}$$

(c) On sait que $\ell > 1$. Donc $\frac{\ell+1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$. Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n$ diverge en tant que série géométrique de raison $q = \frac{\ell+1}{2} > 1$. Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n_0} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_{n_0}}{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n_0}} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n$ diverge également car $\frac{a_{n_0}}{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n_0}} > 0$. Or pour tout $n \geqslant n_0$, on a montré à la question précédente que

$$0 \leqslant a_{n_0} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} \leqslant a_n.$$

Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ diverge.}}$$

5. Soit $x \in]1;+\infty[$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_n x^n$. D'après la question 1.(b), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n} = \frac{u_n - u_n^2}{u_n} x = (1-u_n)\, x.$$

Donc d'après la question 1.(c), on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x.$$

Puisque $x > 1$, il découle de la question 4 que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n \text{ diverge.}}$$

6. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left[\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)\right].$$

On reconnait une série télescopique. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) = \ln(u_{n+1}) + \ln(4).$$

Or d'après la question 1.(c), $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln(u_{n+1}) + \ln(4) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \text{ diverge.}}$$

(b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_n - u_n^2}{u_n}\right) = \ln(1-u_n)$. Or d'après la question 1.(c), $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\ln(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n \qquad \Leftrightarrow \qquad -\ln(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$

De plus, d'après la question précédente, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} -\ln(1-u_n)$ diverge. Or $-\ln(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ (d'après la question 1.(b)) donc par le théorème des équivalents pour les séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ diverge.}}$$

7. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = nu_n$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par définition de w_n puis de u_n,

$$w_{n+1} - w_n = (n+1)\,u_{n+1} - nu_n = (n+1)\left(u_n - u_n^2\right) - nu_n = u_n - (n+1)\,u_n^2.$$

En factorisant par u_n, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_{n+1} - w_n = u_n\left(1-(n+1)\,u_n\right).}$$

(b) D'après la question 1.(b), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+4}$ et donc $(n+1)\,u_n \leqslant \frac{n+1}{n+4} \leqslant 1$. Donc $1-(n+1)\,u_n$ et on a toujours $u_n \geqslant 0$. Donc d'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_{n+1} - w_n \geqslant 0.$$

Autrement dit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante. Or, toujours par la question 1.(b), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = nu_n \leqslant \frac{n}{n+4} \leqslant 1$. Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1. Donc d'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que

$$\boxed{(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

On note ω sa limite.

(c) Puisque $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on en déduit que $\omega \geqslant w_1 = 1 \times u_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} > 0$. Donc $\omega \neq 0$. Le réel ω étant non nul et la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \omega \qquad \Leftrightarrow \qquad nu_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \omega \qquad \Leftrightarrow \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\omega}{n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\omega \neq 0 \qquad \text{et} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\omega}{n}.}$$

(d) La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (w_{n+1} - w_n)$ est une série télescopique. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} (w_{k+1} - w_k) = w_{n+1} - w_0 = w_{n+1}.$$

Or nous avons vu à la question 7.(b) que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers ω). On en déduit donc que $\sum_{n\in\mathbb{N}} (w_{n+1} - w_n)$ est une série convergente (et sa somme totale vaut ω). D'autre part, par les questions précédentes, on a

$$\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n &\underset{Q7.(a)}{=} u_n \left(1 - (n+1) u_n\right) \\
&\underset{Q7.(c)}{=} \left(\frac{\omega}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 - (n+1) \left(\frac{\omega}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= \left(\frac{\omega}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 - \omega + o\left(1\right)\right) \\
&= \frac{\omega\left(1-\omega\right)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Procédons maintenant par un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\omega \neq 1$. On a déjà vu à la question précédente que $\omega \neq 0$. Donc on en déduit que $\omega\left(1-\omega\right) \neq 0$ et par suite,

$$w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\omega\left(1-\omega\right)}{n}.$$

De plus on a vu à la question 7.(b) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n \geqslant 0$. Or deux séries dont les termes généraux sont équivalents et de signe constant ont même nature. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(w_{n+1} - w_n\right)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\omega(1-\omega)}{n}$. Or d'une part, on a vu que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(w_{n+1} - w_n\right)$ converge et d'autre part, puisque $\omega\left(1-\omega\right) \neq 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\omega(1-\omega)}{n} = \omega\left(1-\omega\right) \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge en tant que multiple de la série harmonique ce qui contredit le fait que les séries sont de même nature. Conclusion,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(w_{n+1} - w_n\right) \text{ converge et } \omega = 1.}$$