Devoir Maison 9
Séries numériques et applications linéaires

A faire pour le jeudi 30 mars

Problème I - Séries numériques

Pour tout $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on définit $(a_n^\star)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n^\star = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k.$$

On s'intéresse alors dans ce problème à la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star$ suivant les hypothèses prises sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie 1 : Le cas constant

On suppose dans cette partie que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante : il existe $c \in \mathbb{C}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = c$.

1. Calculer alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n^\star$.
2. En déduire la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star$ suivant la valeur de c.

Partie 2 : Le cas géométrique

On suppose dans cette partie qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = z^n$.

3. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n^\star$.
4. Préciser pour quelles valeurs de z, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge. Préciser dans ce cas $S(z)$ la somme totale associée.
5. On suppose que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge.
   (a) Montrer alors que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star$ converge.
   (b) Déterminer dans ce cas $S^\star(z)$ la somme totale associée en fonction de $S(z)$.
6. Montrer que la réciproque de la question 5.(a) est fausse en étudiant le cas où $z = -2$.
7. Soit $\theta \in]0;\pi[$. On suppose que $z = \mathrm{e}^{i\theta}$. Montrer que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star$ converge.

Partie 3 : Par comparaison

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite complexe à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n| \leqslant b_n.$$

On suppose également que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n^\star$ converge.

8. Montrer que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star$ converge.

9. Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{z^n}{n!}$.
   (a) Préciser la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et en cas de convergence la valeur de sa somme totale.
   (b) Quelle est la limite de $(2^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (c) En déduire que $(2^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée puis que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star$ converge.

Partie 4 : Le cas général

On admet dans cette partie le résultat suivant (une sorte de théorème de Cesàro) :

si une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors la suite $(v_n^\star)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

On se munit d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^\star \qquad U_n = 2^n T_n.$$

On considère enfin

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S'_n = S_{n-1} \qquad \text{et} \qquad S'_0 = 0.$$

10. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S'_k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S'_{k+1} = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} S'_k.$$
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$U_{n+1} = 2U_n + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(S'_{k+1} - S'_k\right).$$
   (c) Démontrer alors par récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = 2^{n+1} \left(S'_{n+1}\right)^\star.$$

11. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge. Montrer alors que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star$ converge et exprimer sa somme totale en fonction de celle de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Problème II - Applications linéaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = M + \mathrm{Tr}(M) I_n$$

Partie 1 : Généralités

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $M \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Calculer $\mathrm{Tr}(M)$.
3. En déduire $\mathrm{Ker}\,(f)$.
4. L'application f est-elle injective ? Est-ce un isomorphisme ? un automorphisme ?
5. En déduire $\mathrm{Im}\,(f)$.
6. (a) Calculer $f^2 - (n+2)\,f + (n+1)\,\mathrm{Id}_E$.
   (b) En déduire f^{-1}.

Partie 2 : Étude du cas particulier $n = 2$

On suppose dans cette partie uniquement que $n = 2$.

7. Rappeler la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, puis calculer $f(\mathscr{B})$.
8. Déterminer une base $\mathscr{B}_0$ de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$, le noyau de la trace, puis préciser sa dimension.
9. En déduire que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}\,(I_2) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
10. En déduire une base $\mathscr{B}'$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall M \in \mathscr{B}',\ f(M) \text{ et } M \text{ sont colinéaires}$$

Partie 3 : Étude du cas général n quelconque

Dans cette partie, n désigne à nouveau un entier naturel supérieur ou égal à 1 quelconque.

11. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$ et $\mathrm{Vect}\,(I_n)$ sont en somme directe.
12. Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$ et $B \in \mathrm{Vect}\,(I_n)$ telles que $M = A + B$. Exprimer B puis A en fonction de M.
13. Déduire de la question précédente que $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$ et $\mathrm{Vect}\,(I_n)$ sont supplémentaires.
14. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$.
15. Préciser p la projection sur $\mathrm{Vect}\,(I_n)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$ et s la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\,(I_n)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$.
16. Montrer les égalités suivantes :

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(f - (n+1)\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(\mathcal{I}_n)$$

17. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}_E) \subseteq \mathrm{Vect}\,(I_n)$ et $\mathrm{Im}\,(f - (n+1)\,\mathrm{Id}_E) \subseteq \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$.
18. Montrer que ces inclusions sont des égalités à l'aide du théorème du rang.