Correction du Devoir Maison 9
Séries numériques et applications linéaires

Du jeudi 30 mars

Problème I - Séries numériques

Pour tout $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on définit $(a_n^\star)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n^\star = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k.$$

On s'intéresse alors dans ce problème à la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star$ suivant les hypothèses prises sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie 1 : Le cas constant

On suppose dans cette partie que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante : il existe $c \in \mathbb{C}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = c$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a directement,

$$a_n^\star = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}c = \frac{c}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}.$$

On reconnait un binôme de Newton. Donc

$$a_n^\star = \frac{c}{2^n}(1+1)^n = c.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^\star = c.}$$

2. *Premier cas :* si $c = 0$, alors la suite $(a_n^\star)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle et donc

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star \text{ est la suite nulle et donc converge et même vers } 0.}$$

Second cas : si $c \neq 0$, alors la suite $(a_n^\star)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 et donc

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star \text{ diverge grossièrement et donc diverge.}}$$

Partie 2 : Le cas géométrique

On suppose dans cette partie qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = z^n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, on a

$$a_n^\star = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k1^{n-k}.$$

On reconnaît un binôme de Newton. Donc

$$a_n^\star = \frac{1}{2^n}(1+z)^n = \left(\frac{1+z}{2}\right)^n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n^\star = \left(\frac{1+z}{2}\right)^n.}$$

4. Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est une somme géométrique de raison z, on en déduit que

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad |z|<1.}$$

Si $|z|<1$, alors, on sait également directement par le cours que sa somme totale vaut

$$\boxed{S(z)=\frac{1}{1-z}.}$$

5. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge.

   (a) Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge d'après la question précédente cela signifie que $|z|<1$. On sait de plus par la question 3. que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star$ est aussi une série géométrique de raison $q=\frac{1+z}{2}$. Montrons que $|q|<1$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$|q|=\left|\frac{1+z}{2}\right|\leqslant\frac{1+|z|}{2}<\frac{1+1}{2}=1.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star \text{ converge.}}$$

   (b) De plus la somme totale est donnée par

$$S^\star(z)=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1+z}{2}}=\frac{2}{1-z}=2S(z).$$

   Conclusion,

$$\boxed{S^\star(z)=2S(z).}$$

6. Si $z=-2$, alors $|z|\geqslant 1$ et donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge. Cependant on a dans ce cas $q=\frac{1+z}{2}=-\frac{1}{2}$, donc $|q|=\frac{1}{2}<1$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star$ converge. Par conséquent pour $z=-2$, on a

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star \text{ convergente et } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ divergente.}}$$

Donc la réciproque

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star \text{ converge} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ converge.}$$

est $\boxed{\text{fausse}}$.

7. Soient $\theta\in\,]0;2\pi[$ et $z=\mathrm{e}^{i\theta}$. Par la question 3., pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_n^\star=\left(\frac{1+z}{2}\right)^n=\left(\frac{1+\mathrm{e}^{i\theta}}{2}\right)^n.$$

Donc par factorisation par l'angle moitié,

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad a_n^\star=\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\,\frac{\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}+\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}}{2}\right)^n=\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n.$$

Donc $a_n^\star$ est une suite géométrique de raison $q = \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Or

$$|q| = \left|\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|.$$

Or $\theta \in]0;2\pi[$, donc $\frac{\theta}{2} \in]0;\pi[$ et donc $|q| = \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| < 1$. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star \text{ converge.}}$$

Là aussi, nous avons un contre-exemple de l'implication $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge car $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \mathrm{e}^{i\theta}$ et donc $|q| = 1$ et donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge grossièrement.

Partie 3 : Par comparaison

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite réelle à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n| \leqslant b_n.$$

On suppose également que $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^\star$ converge.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par l'inégalité triangulaire,

$$|a_n^\star| = \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|a_k| \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|b_k|.$$

   Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_k \geqslant 0$ et donc $|b_k| = b_k$. Ainsi,

$$0 \leqslant |a_n^\star| \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k = b_n^\star$$

   De plus par hypothèse, $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^\star$ converge. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n^\star| \text{ converge.}$$

   Autrement dit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star \text{ converge.}}$$

9. Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{z^n}{n!}$.

   (a) On reconnait la série exponentielle. Ainsi, on a directement,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ converge et } S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \mathrm{e}^z.}$$

   (b) Par croissance comparée,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} 2^n a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2z)^n}{n!} = 0.}$$

(c) Par la question précédente, $(2^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Or toute suite convergente est bornée. Donc $(2^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée :

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |2^n a_n| \leqslant M.}$$

On en déduit notamment que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant |a_n| \leqslant \frac{M}{2^n}.$$

Donc pour $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant |2^n a_n| \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant |a_n| \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad\qquad \text{car } 2^n > 0.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{2^n}$ et $c_n = Mb_n = \frac{M}{2^n}$. On a donc

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n \geqslant 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant a_n = |a_n| \leqslant c_n$.
- La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ est une série géométrique de raison $z = \frac{1}{2}$, $|z| < 1$. Donc d'après la partie II, on en déduit que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n^\star$ converge. Puis pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n^\star = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}c_k = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Mb_k = M\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k = Mb_n^\star.$$

  Donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n^\star$ converge également.

Conclusion, d'après la question 8., on en déduit que

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star \text{ converge.}}$$

Partie 4 : Le cas général

On admet dans cette partie le résultat suivant (une sorte de théorème de Cesàro) :

si une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors la suite $(v_n^\star)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

On se munit d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^\star \qquad U_n = 2^n T_n.$$

On considère enfin

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S'_n = S_{n-1} \qquad \text{et} \qquad S'_0 = 0.$$

10. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$A = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}S'_k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}S'_{k+1}.$$

Par le changement d'indice $\tilde{k} = k+1$, on obtient dans la seconde somme :

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S'_k + \sum_{\tilde{k}=1}^{n+2} \binom{n+1}{\tilde{k}-1} S'_{\tilde{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S'_k + \sum_{k=1}^{n+2} \binom{n+1}{k-1} S'_k \qquad \text{car l'indice est muet} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} S'_k + S'_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k-1} S'_k + S'_{n+2} \\
&= S'_0 + S'_{n+2} + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k-1} \right) S'_k \\
&= S'_0 + S'_{n+2} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2}{k} S'_k \qquad \text{par la fomule du triangle de Pascal} \\
&= \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} S'_k.
\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S'_k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S'_{k+1} = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} S'_k.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= 2^{n+1} T_{n+1} \\
&= 2^{n+1} \left(T_n + a^\star_{n+1} \right) \\
&= 2 \times 2^n T_n + 2^{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k \\
&= 2U_n + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k.
\end{aligned}$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$a_k = S_k - S_{k-1} = S'_{k+1} - S'_k.$$

On note que cette formule reste vraie si $k = 0$ car $a_0 = S_0 - 0 = S'_1 - S'_0$. Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{U_{n+1} = 2U_n + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(S'_{k+1} - S'_k \right).}$$

(c) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{P}(n) \qquad \text{« } U_n = 2^{n+1} \left(S'_{n+1} \right)^\star \text{ »}$$

Procédons par récurrence.
Initialisation. Si $n = 0$. Alors

$$U_0 = 2^0 T_0 = T_0 = a^\star_0 = \frac{1}{2^0} \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a_0 = a_0.$$

D'autre part,

$$2^{n+1} \left(S'_{n+1} \right)^\star = 2 \left(S'_1 \right)^\star = 2 \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{0} S'_k = S'_0 + S'_1 = 0 + S_0 = a_0.$$

Donc $U_0 = 2\left(S_1'\right)^\star$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Par la question précédente, on a

$$U_{n+1} = 2U_n + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(S_{k+1}' - S_k'\right).$$

Donc par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= 2\left(2^{n+1}\left(S_{n+1}'\right)^\star\right) + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_{k+1}' - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k' \\ &= 2\left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k'\right) + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_{k+1}' - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k' \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k' + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_{k+1}'. \end{aligned}$$

Donc d'après 10.a, on a

$$U_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} S_k' = 2^{n+2}\left(S_{n+2}'\right)^\star.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = 2^{n+1}\left(S_{n+1}'\right)^\star.}$$

11. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge. Autrement dit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Donc $(S_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. D'après l'énoncé, cela implique que la suite $\left((S_n')^\star\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ. Or par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^\star = T_n = \frac{U_n}{2^n} = \frac{2^{n+1}\left(S_{n+1}'\right)^\star}{2^n} = 2\left(S_{n+1}'\right)^\star.$$

Donc la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Autrement dit $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^\star \text{ converge}}$. De plus, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^\star = 2 \lim_{n\to+\infty} \left(S_{n+1}'\right)^\star = 2\ell = 2 \lim_{n\to+\infty} S_n' = 2 \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = 2 \lim_{n\to+\infty} S_n = 2\sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^\star = 2\sum_{k=0}^{+\infty} a_k.}$$

Problème II - Applications linéaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = M + \mathrm{Tr}(M) I_n$$

Partie 1 : Généralités

1. L'application f est bien définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et est à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que f est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$. On a les égalités matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} f(\lambda M + \mu N) &= \lambda M + \mu N + \operatorname{Tr}(\lambda M + \mu N) I_n \\ &= \lambda M + \mu N + (\lambda \operatorname{Tr}(M) + \mu \operatorname{Tr}(N)) I_n && \text{par linéarité de la trace} \\ &= \lambda (M + \operatorname{Tr}(M) I_n) + \mu (M + \operatorname{Tr}(N) I_n) \\ &= \lambda f(M) + \mu f(N). \end{aligned}$$

Donc f est bien linéaire et les espaces de départ et d'arrivée coïncident. Conclusion,

$$\boxed{\text{l'application } f \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2. Soit $M \in \operatorname{Ker}(f)$. Par définition,

$$f(M) = O_n \qquad \Leftrightarrow \qquad M + \operatorname{Tr}(M) I_n = O_n \qquad \Leftrightarrow \qquad M = -\operatorname{Tr}(M) I_n.$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(M) = \operatorname{Tr}(\underbrace{-\operatorname{Tr}(M)}_{\in \mathbb{R}} I_n) &= -\operatorname{Tr}(M) \operatorname{Tr}(I_n) && \text{par linéarité de la trace} \\ &= -n \operatorname{Tr}(M) \end{aligned}$$

D'où

$$(n+1) \operatorname{Tr}(M) = 0_{\mathbb{R}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\operatorname{Tr}(M) = 0_{\mathbb{R}}.}$$

3. Soit $M \in \operatorname{Ker}(f)$. Par la question précédente, $\operatorname{Tr}(M) = 0_{\mathbb{R}}$. Or nous avions par définition, $M + \operatorname{Tr}(M) I_n = O_n$. Ainsi,

$$M + O_n = O_n \qquad \Leftrightarrow \qquad M = O_n.$$

Donc $\operatorname{Ker}(f) \subseteq \{O_n\}$. Or l'inclusion réciproque est aussi vraie car $\operatorname{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) = \{O_n\}.}$$

4. Par la question précédente, on en déduit directement que

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } f \text{ est injectif.}}$$

Or f est un endomorphisme en dimension finie. Donc

$$\boxed{\text{l'application } f \text{ est un automorphisme de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ donc notamment un isomorphisme.}}$$

5. Directement par la question précédente, puisque f est bijectif, il est notamment surjectif :

$$\boxed{\operatorname{Im}(f) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

6. (a) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} f^2(M) = f \circ f(M) = f(M + \operatorname{Tr}(M) I_n) &= f(M) + \operatorname{Tr}(M) f(I_n) && \text{par linéarité de } f \\ &= M + \operatorname{Tr}(M) I_n + \operatorname{Tr}(M)(I_n + \operatorname{Tr}(I_n) I_n) \\ &= M + (n+2) \operatorname{Tr}(M) I_n. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}&\left(f^2-(n+2)\,f+(n+1)\,\mathrm{Id}_E\right)(M)\\&=f^2(M)-(n+2)\,f(M)+(n+1)\,M\\&=M+(n+2)\,\mathrm{Tr}\,(M)\,I_n-(n+2)\,M-(n+2)\,\mathrm{Tr}\,(M)\,I_n+(n+1)\,M\\&=O_n.\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $M\in E$, on conclut que

$$\boxed{f^2-(n+2)\,f+(n+1)\,\mathrm{Id}_E=0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

(b) Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}f^2-(n+2)\,f+(n+1)\,\mathrm{Id}_E=0_{\mathscr{L}(E)}\quad&\Leftrightarrow\quad f\circ(f-(n+2)\,\mathrm{Id}_E)=-(n+1)\,\mathrm{Id}_E\\&\Leftrightarrow\quad f\circ\left(\frac{n+2}{n+1}\mathrm{Id}_E-\frac{1}{n+1}f\right)=\mathrm{Id}_E\end{aligned}$$

On retrouve que f est bijective et de plus,

$$\boxed{f^{-1}=\frac{n+2}{n+1}\mathrm{Id}_E-\frac{1}{n+1}f.}$$

Partie 2 : Étude du cas particulier $n=2$

On suppose dans cette partie uniquement que $n=2$.

7. La base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est :

$$\boxed{\mathscr{B}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})=\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)}$$

et

$$\boxed{f(\mathscr{B})=\left(\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\right).}$$

8. On a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})\quad&=\quad\left\{\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\mid a_{11}+a_{22}=0\right\}\\&=\quad\left\{\begin{bmatrix}-a_{22}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\text{ avec }(a_{22},a_{12},a_{21})\in\mathbb{R}^3\right\}\\&=\quad\left\{a_{22}\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}+a_{12}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+a_{21}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\text{ avec }(a_{22},a_{12},a_{21})\in\mathbb{R}^3\right\}\\\text{d'où : }\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})\quad&=\quad\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

La famille $\mathscr{B}_0=(-E_{11}+E_{22},E_{12},E_{21})$ est une famille génératrice de Ker(Tr). Montrons qu'elle est libre. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$a\,(-E_{11}+E_{22})+bE_{12}+cE_{21}=O_2.$$

Alors, $\begin{bmatrix}-a&b\\c&a\end{bmatrix}=O_2$ et donc $a=b=c=0$. Donc $\mathscr{B}_0$ est libre. D'où

$$\boxed{\mathscr{B}_0=(-E_{11}+E_{22},E_{12},E_{21})\ \text{ est une base de Ker}\,(\mathrm{Tr})\,.}$$

Conclusion :

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}))=\mathrm{Card}(\mathscr{B}_0)=3.}$$

9. La famille (I_2) est libre (car constituée d'un seul vecteur non nul) et est génératrice de $\mathrm{Vect}\,(I_2)$, donc est une base de $\mathrm{Vect}\,(I_2)$. Montrons que $\mathscr{B}_1 = (\mathscr{B}_0, I_2)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Les opérations élémentaires ne modifient pas le rang :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\,(\mathscr{B}_1) &= \mathrm{rg}\,(-E_{11}+E_{22}, E_{12}, E_{21}, I_2) \\
&= \mathrm{rg}\,(E_{22}, E_{12}, E_{21}, I_2) \qquad C_1 \leftarrow \frac{1}{2}(C_1 + C_4) \\
&= \mathrm{rg}\,(E_{22}, E_{12}, E_{21}, E_{11}) \qquad C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \\
&= 4 \qquad \text{car on reconnait la base canonique de } \mathscr{M}_2\,(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{rg}\,(\mathscr{B}_1) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_1)$ donc $\mathscr{B}_1$ est libre. De plus $\mathrm{rg}\,(\mathscr{B}_1) = \dim\,(\mathscr{M}_2\,(\mathbb{R}))$ donc $\mathscr{B}_1$ est génératrice de $\mathscr{M}_2\,(\mathbb{R})$ donc $\mathscr{B}_1$ est une base de $\mathscr{M}_2\,(\mathbb{R})$. Ainsi (I_2) est une base de $\mathrm{Vect}\,(I_2)$, $\mathscr{B}_0$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$ et $\mathscr{B}_1 = (\mathscr{B}_0, I_2)$ est une base de $\mathscr{M}_2\,(\mathbb{R})$. Conclusion, par le théorème de la base adaptée,

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I_2) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

10. Posons $\mathscr{B}' = (\mathscr{B}_0, I_2)$.
Vérifions que $\mathscr{B}' = (\mathscr{B}_0, I_2)$ convient i.e. $\begin{cases} \mathscr{B}' \text{ est une base de } E & (i) \\ \forall u \in \mathscr{B}',\ f(u) \text{ et } u \text{ sont colinéaires} & (ii) \end{cases}$

   (i) Par la question précédente.

   $\boxed{(ii)}$ Soit $M \in \mathscr{B}'$. Montrons que $f(M)$ et M sont colinéaires.
   Comme $M \in \mathscr{B}' = (\mathscr{B}_0, I_2)$, il vient que :

$$\left[\begin{array}{c} M \in \mathscr{B}_{0)} \\ \text{OU} \\ M = I_2 \end{array}\right] \quad \text{d'où :} \quad \left[\begin{array}{c} f(M) \underset{\mathrm{Tr}(M)=0_{\mathbb{R}}}{=} M \\ \text{OU} \\ f(I_2) = I_2 + \mathrm{Tr}\,(I_2)\, I_2 = 3\mathcal{I}_2 \end{array}\right]$$

Dans tous les cas, $f(M)$ et M sont colinéaires. Conclusion,

$$\boxed{\exists \mathscr{B}' \text{ base de } E \text{ telle que, } \forall M \in \mathscr{B}',\ f(M) \text{ et } M \text{ sont colinéaires.}}$$

Partie 3 : Étude du cas général n quelconque

Dans cette partie, n désigne à nouveau un entier naturel supérieur ou égal à 1 quelconque.

11. Montrons que $\mathrm{Vect}(I_n) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \{O_n\}$.

   $\supset$ Une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel, donc contient le vecteur nul.

   $\subset$ Soit $A \in \mathrm{Vect}(I_n) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$. Alors $\begin{cases} A \in \mathrm{Vect}(I_n) \\ A \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid A = \lambda I_n \\ \mathrm{Tr}(A) = 0_{\mathbb{R}} \end{cases}$.
   Montrons que $A = O_n$.
   On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A) = 0_{\mathbb{R}} &\iff \mathrm{Tr}(\lambda I_n) = 0_{\mathbb{R}} && \text{car } A = \lambda I_n \\
&\iff \lambda \mathrm{Tr}(I_n) = 0_{\mathbb{R}} && \text{par linéarité de la trace} \\
&\iff \lambda n = 0_{\mathbb{R}} && \text{car } \mathrm{Tr}(I_n) = n \\
&\iff \lambda = 0_{\mathbb{R}} && \text{car } n \neq 0
\end{aligned}$$

   Donc $A = \lambda I_n = O_n$ et donc $\mathrm{Vect}(I_n) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \subseteq \{O_n\}$.

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Vect}(I_n) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \{\mathcal{O}_n\}.}$$

12. Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ et $B = \mathrm{Vect}(I_n)$ telles que $M = A + B$. Puisque $B \in \mathrm{Vect}(I_n)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B = \lambda I_n$. De plus,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A + \lambda I_n) &= \mathrm{Tr}(A) + \lambda \mathrm{Tr}(I_n) && \text{par linéarité de la trace} \\ &= \lambda n && \text{car } A \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}). \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda = \frac{\mathrm{Tr}(M)}{n}$ car $n \geqslant 1$. D'où

$$\boxed{B = \lambda I_n = \frac{\mathrm{Tr}(M)}{n} I_n \qquad \text{puis} \qquad A = M - B = M - \frac{\mathrm{Tr}(M)}{n} I_n.}$$

13. Nous venons de redémontrer par une analyse que la décomposition d'une matrice M comme un élément de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ plus un élément de $\mathrm{Vect}(I_n)$ est unique et que donc ces deux espaces sont en somme directe. Procédons à la synthèse. Soit $M \in E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) + \mathrm{Vect}(I_n)$. Posons

$$B = \frac{\mathrm{Tr}(M)}{n} I_n \qquad \text{et} \qquad A = M - \frac{\mathrm{Tr}(M)}{n} I_n.$$

Dès lors,

- on a
$$A + B = \frac{\mathrm{Tr}(M)}{n} I_n + M - \frac{\mathrm{Tr}(M)}{n} I_n = M.$$
- De plus,
$$B = \underbrace{\frac{\mathrm{Tr}(M)}{n}}_{\in \mathbb{R}} I_n \in \mathrm{Vect}(I_n).$$
- Enfin,
$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\left(M - \frac{\mathrm{Tr}(M)}{n} I_n\right) &= \mathrm{Tr}(M) - \frac{\mathrm{Tr}(M)}{n} \mathrm{Tr}(I_n) && \text{par linéarité de la trace} \\ &= \mathrm{Tr}(M) - \frac{\mathrm{Tr}(M)}{n} n = 0_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$
Donc $A \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

Finalement, on obtient que
$$M = A + B \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) + \mathrm{Vect}(I_n).$$
Ceci étant vrai pour toute matrice $M \in E$. On en déduit que $E \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) + \mathrm{Vect}(I_n)$. Or on a aussi $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) + \mathrm{Vect}(I_n) \subseteq E$. Donc
$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) + \mathrm{Vect}(I_n) = E.$$
De plus par la question 11. les deux espaces sont en somme directe. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I_n) = E.}$$

14. Par la question précédente,

$$\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) + \dim(\mathrm{Vect}(I_n)) = \dim(E) = n^2.$$

Or (I_n) est libre car formée d'une seule matrice non nulle et engendre $\mathrm{Vect}(I_n)$ donc (I_n) est une base de $\mathrm{Vect}(I_n)$ qui est donc une droite vectorielle :

$$\dim(\mathrm{Vect}(I_n)) = 1.$$

Finalement,

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) = n^2 - \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) = n^2 - 1.}$$

15. Par les questions précédentes, nous avons vu que la décomposition de toute matrice $M \in E$ est donnée par

$$\forall M \in E, \qquad M = \underbrace{M - \frac{\mathrm{Tr}(M)}{n} I_n}_{\in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})} + \underbrace{\frac{\mathrm{Tr}(M)}{n} I_n}_{\in \mathrm{Vect}(I_n)}.$$

Ainsi, on en déduit que la projection sur $\mathrm{Vect}(I_n)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est donnée par

$$\boxed{p : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & \frac{\mathrm{Tr}(M)}{n} I_n. \end{array}}$$

De même plus la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(I_n)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est donnée par $s = \mathrm{Id}_E + 2(p - \mathrm{Id}_E) = 2p - \mathrm{Id}_E$ et donc

$$\boxed{s : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & 2\frac{\mathrm{Tr}(M)}{n} I_n - M. \end{array}}$$

16. Montrons que :

$$(i)\ \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \qquad \text{et} \qquad (ii)\ \mathrm{Ker}(f - (n+1)\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(\mathcal{I}_n)$$

(i) On a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) & = & \{M \in E \mid (f - \mathrm{Id}_E)(M) = 0_E\} & \\ & = & \{M \in E \mid f(M) - M = 0_E\} & \\ & = & \{M \in E \mid \mathrm{Tr}(M) I_n = 0_E\} & \\ & = & \{M \in E \mid \mathrm{Tr}(M) = 0_{\mathbb{R}}\} & \text{car } \mathcal{I}_n \neq 0_E \\ & = & \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}). & \end{array}$$

(ii) Montrons que par double inclusion que $\mathrm{Ker}(f - (n+1)\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(I_n)$.

$\boxed{\subset}$ Soit $M \in \mathrm{Ker}(f - (n+1)\mathrm{Id}_E)$. Alors $(f - (n+1)\mathrm{Id}_E)(M) = O_n$ i.e. $f(M) = (n+1)M$.
Montrons que $M \in \mathrm{Vect}(I_n)$.
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} f(M) = (n+1)M & \Leftrightarrow & M + \mathrm{Tr}(M) I_n = (n+1)M \\ & \Leftrightarrow & M = \underbrace{\frac{\mathrm{Tr}(M)}{n}}_{=\lambda \in \mathbb{R}} I_n \in \mathrm{Vect}(I_n) \end{array}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f - (n+1)\mathrm{Id}_E) \subseteq \mathrm{Vect}(I_n)$.

$\supset$ Soit $M \in \mathrm{Vect}(I_n)$. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ M = \lambda I_n$.
Montrons que $M \in \mathrm{Ker}(f - (n+1)\mathrm{Id}_E)$ i.e. $f(M) = (n+1)M$.
On a les égalités matricielles suivantes :

$$f(M) = f(\lambda I_n) = \lambda I_n + \mathrm{Tr}(\lambda I_n) I_n = (1+n)(\lambda I_n) = (n+1)M$$

D'où $\mathrm{Vect}(I_n) \subseteq \mathrm{Ker}(f - (n+1)\mathrm{Id}_E)$.

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(f - (n+1)\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(I_n).}$$

17. Montrons que $\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id}_E) \subseteq \mathrm{Vect}\,(I_n)$. Soit $M \in \mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id}_E)$. Alors, il existe $N \in E$ tel que

$$M = (f-\mathrm{Id}_E)\,(N) = f(N) - N = N + \mathrm{Tr}\,(N)\,I_n - N = \underbrace{\mathrm{Tr}\,(N)}_{\in\mathbb{R}}\,I_n \in \mathrm{Vect}\,(I_n)\,.$$

Donc $\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id}_E) \subseteq \mathrm{Vect}\,(I_n)$.

Montrons que $\mathrm{Im}\,(f-(n+1)\,\mathrm{Id}_E) \subseteq \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$. Soit $M \in \mathrm{Im}\,(f-(n+1)\,\mathrm{Id}_E)$. Alors, il existe $N \in E$ tel que

$$M = (f-(n+1)\,\mathrm{Id}_E)\,(N) = f(N) - (n+1)\,N = N + \mathrm{Tr}\,(N)\,I_n - (n+1)\,N = \mathrm{Tr}\,(N)\,I_n - nN.$$

Par la linéarité de la trace, on en déduit que

$$\mathrm{Tr}\,(M) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Tr}\,(N)\,I_n - nN) = \mathrm{Tr}\,(N)\,\mathrm{Tr}\,(I_n) - n\mathrm{Tr}\,(N) = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $M \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$. Ceci étant vrai pour tout $M \in \mathrm{Im}\,(f-(n+1)\,\mathrm{Id}_E)$, on en déduit que

$$\mathrm{Im}\,(f-(n+1)\,\mathrm{Id}_E) \subseteq \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id}_E) \subseteq \mathrm{Vect}\,(I_n) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,(f-(n+1)\,\mathrm{Id}_E) \subseteq \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})\,.}$$

18. Par le théorème du rang, on a

$$\dim\,(\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id}_E)) = \mathrm{rg}\,(f-\mathrm{Id}_E) = \dim\,(E) - \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id}_E))\,.$$

Donc par la question 16.,

$$\dim\,(\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id}_E)) = \dim\,(E) - \dim\,(\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr}))\,.$$

Or par la question 14., $\dim\,(\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})) = n^2 - 1$. Ainsi,

$$\dim\,(\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id}_E)) = n^2 - \left(n^2 - 1\right) = 1 = \dim\,(\mathrm{Vect}\,(I_n))\,.$$

Or par la question précédente, $\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id}_E) \subseteq \mathrm{Vect}\,(I_n)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\,(I_n)\,.}$$

De même, par le théorème du rang,

$$\dim\,(\mathrm{Im}\,(f-(n+1)\,\mathrm{Id}_E)) = \mathrm{rg}\,(f-(n+1)\,\mathrm{Id}_E) = \dim\,(E) - \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f-(n+1)\,\mathrm{Id}_E))\,.$$

Donc par la question 16.,

$$\dim\,(\mathrm{Im}\,(f-(n+1)\,\mathrm{Id}_E)) = \dim\,(E) - \dim\,(\mathrm{Vect}\,(I_n)) = n^2 - 1.$$

Or par la question 14., $\dim\,(\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})) = n^2 - 1$. Ainsi,

$$\dim\,(\mathrm{Im}\,(f-(n+1)\,\mathrm{Id}_E)) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr}))\,.$$

Et puisque par la question précédente, $\mathrm{Im}\,(f-(n+1)\,\mathrm{Id}_E) \subseteq \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})$, on en conclut également que

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f-(n+1)\,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})\,.}$$

« La dimension c'est béton, le théorème du rang c'est puissant. »