Banque PT - Maths A - 2021
Version pour juniors

Les parties en bleu ont été ajoutées ou modifiées par rapport sujet initial.

Probabilités

On étudie le processus de fonctionnement d'un appareil utilisé chaque jour dans une usine et susceptible de subir des pannes accidentelles. On fait les hypothèses suivantes :

- Le comportement de l'appareil au jour $n+1$ ne dépend que de son état au jour n et pas des jours précédents.
- Si l'appareil fonctionne le jour n, il a une probabilité α d'être en panne le jour $n+1$.
- Si l'appareil est en panne au jour n, il a une probabilité β d'être réparé et de fonctionner le jour $n+1$.
- On a $0<\alpha<1$ et $\beta>0$.

Formellement, si l'on appelle X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si l'appareil fonctionne le jour n et 0 si l'appareil est en panne le jour n, on a

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=0 \mid X_n=1\right)=\alpha,$$
$$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=1 \mid X_n=0\right)=\beta.$$

1. On note $p_n=\mathbb{P}\left(X_n=1\right)$.
   (a) Calculer p_2 en fonction de p_1.
   (b) Plus généralement, montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,
   $$p_{n+1}=\beta+(1-\alpha-\beta)\, p_n.$$
   (c) En déduire une expression de p_n en fonction de p_1.
   (d) Calculer $\lim\limits_{n \rightarrow+\infty} p_n$.
2. On suppose dans cette question que $p_1=\frac{\beta}{\alpha+\beta}$.
   (a) Calculer la loi de X_2.
   (b) Calculer la loi du couple $\left(X_1, X_2\right)$.
   (c) Calculer l'espérance et la variance de X_1 et de X_2.
   (d) Calculer la covariance de X_1 et X_2.
   (e) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
3. On suppose maintenant que l'appareil est en fonctionnement le premier jour. On note N le numéro du jour où cet appareil tombe en panne pour la première fois. Pour tout entier naturel non nul k, exprimer l'évènement $N-1=k$ à l'aide des X_i et en déduire la loi de $N-1$. On appelle cette loi une loi géométrique de paramètre α.

4. On considère Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. On appelle alors fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, la fonction définie sur $[0;1]$ par
$$\forall t \in [0;1], \quad G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \mathbb{P}(X=k).$$
Montrer que G_X est bien définie sur $[0;1[$. *On admet que pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1$ et que donc G_X est bien définie en 1 et $G_X(1) = 1$.*
   (a) Quelle est la fonction génératrice de Y_1 ?
   (b) En déduire la fonction génératrice de $Y_1 + Y_2$.
   (c) On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_X(n) = \mathbb{P}(X \leqslant n).$$
   Calculer la fonction de répartition de Y_1.
   On pose $Z = \min(Y_1, Y_2)$. Calculer la fonction de répartition de Z. Montrer que cela correspond à une fonction de répartition d'une variable aléatoire géométrique dont on précisera le paramètre.
   (d) On pose $T = \max(Y_1, Y_2)$. Calculer la fonction de répartition de T et en déduire la loi de T.

5. Soit $Y \sim \mathscr{G}(p)$ une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. Montrer que $\mathbb{E}(Y)$ existe. On admet alors que $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p}$. L'usine est équipée de deux appareils dont on suppose les comportements indépendants l'un de l'autre. On suppose que les deux appareils sont en fonctionnement le premier jour. Au bout de combien de jours en moyenne se produira la première panne ?

Algèbre linéaire

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ ($d \geqslant 2$) muni du produit scalaire usuel noté $\langle x, y\rangle$ entre les vecteurs x et y. Le vecteur nul de $\mathbb{R}_d$ sera noté 0.
Dans tout le problème, si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$, on note V^* l'ensemble $V \setminus \{0\}$.
Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^d$, pour tout entier $n \geqslant 1$, on note f^n la composée n-fois de l'application f :
$$f = \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$
Si A est une matrice de taille $n \times p$, on note A^T sa transposée.

Partie I

1. On considère la matrice B suivante :
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$
et on note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à B.
   (a) Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\mathrm{Ker}(B - \lambda I_3) \neq \{0\}$. Puis, pour chacune de ces valeurs, préciser $\mathrm{Ker}(B - \lambda I_3)$.
   (b) En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera dans laquelle la matrice de g est diagonale. Vérifier que $\mathscr{B}_1$ est orthogonale. Déterminer alors une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle g est diagonale avec les valeurs sur la diagonale rangées par ordre croissant. Dans la suite de cette partie, (e_1, e_2, e_3) désignera cette base.

(c) Soit $x = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i$. Exprimer en fonction de x_1, x_2, x_3 les quantités $\langle x, x\rangle$, $\langle g(x), x\rangle$ puis $\langle g^n(x), x\rangle$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
Dans la suite de cette partie, on notera $v_n(x) = \langle g^n(x), x\rangle$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$.

(d) Montrer que, pour tout $x \neq 0$, la suite $(v_n(x))_{n\geqslant 1}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

(e) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $x_3 \neq 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n(x)}{v_{n-1}(x)}$.

2. On considère maintenant la matrice C suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à C.

(a) Montrer que la matrice de h dans la base (e_1, e_2, e_3) est diagonale.

(b) Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}^3$, on pose $w_n(x) = \langle h^n(x), x\rangle$. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{w_n(e_1)}{w_{n-1}(e_1)}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{w_n(e_2)}{w_{n-1}(e_2)}, \lim_{n\to+\infty} \frac{w_n(e_3)}{w_{n-1}(e_3)}.$$

(c) Déterminer l'ensemble D des vecteurs x de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la suite $(w_n(x))_{n\geqslant 1}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

(d) Déterminer un vecteur $x_0 \in D$ pour lequel la suite $\left(\frac{w_n(x_0)}{w_{n-1}(x_0)}\right)_{n\in\geqslant 1}$ ne converge pas.

(e) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{w_n(x)}{w_{n-2}(x)}$ pour tout $x \in D$.

Partie II

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ une matrice symétrique réelle d'ordre d et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ canoniquement associé à A. On admet qu'il existe $(e_1, \ldots, e_d)$ une base orthonormée de vecteurs de $\mathbb{R}^d$ telle que la matrice de f dans cette base soit une matrice diagonale. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ les coefficients diagonaux de cette matrice et on les suppose rangés dans l'ordre des valeurs absolues croissantes

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_d|\,.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, on note $u_n(x) = \langle f^n(x), x\rangle$ et on note D l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^d$ pour lesquels la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

1. On suppose que $|\lambda_{d-1}| < |\lambda_d|$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\langle x, e_d\rangle \neq 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} = \lambda_d\,.$$

2. On suppose maintenant que

$$|\lambda_k| < |\lambda_d| \text{ et } \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_d \tag{1}$$

pour un certain $k < d$. Montrer que la limite précédente est encore valable pour tout x tel que $\langle x, e_d\rangle \neq 0$.

3. On suppose maintenant que $\lambda_{d-1} = -\lambda_d \neq 0$. Montrer que l'on peut trouver un $x \in D$ tel que la suite $(u_n(x)/u_{n-1}(x))_{n\geqslant 1}$ ne converge pas.

Partie III

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre d, non nulle, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ canoniquement associé à A. On admet toujours qu'il existe $(e_1, \ldots, e_d)$ une base orthonormée de vecteurs de $\mathbb{R}^d$ telle que la matrice de f dans cette base soit une matrice diagonale. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ les coefficients diagonaux de cette matrice et on les suppose rangés par ordre croissant :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_d$$

Pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, on note

$$E_k = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \text{ et } F_k = \operatorname{Vect}(e_k, \ldots, e_d).$$

1. Montrer que pour tout $x \in F_k^*$, on a $\frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \geqslant \lambda_k$.
2. Montrer que $\displaystyle\min_{x \in F_k^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_k$.
3. Montrer que $\displaystyle\max_{x \in E_k^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_k$.
4. Pour tout entier k, $1 \leqslant k \leqslant d$, on note $\mathcal{V}_k$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$ de dimension k.
   (a) Montrer que si $V \in \mathcal{V}_k$, $V \cap F_k \neq \{0\}$.
   (b) En déduire que, si $V \in \mathcal{V}_k$, $\displaystyle\max_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \geqslant \lambda_k$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\min_{V \in \mathcal{V}_k} \max_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_k$.
   (d) Montrer que $\displaystyle\max_{V \in \mathcal{V}_{d-k+1}} \min_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_k$.
5. Soit Q une matrice de taille $d \times (d-1)$ telle que $Q^T Q = I_{d-1}$ et soit q l'application linéaire de $\mathbb{R}^{d-1}$ dans $\mathbb{R}^d$ canoniquement associée à Q. On pose alors $A' = Q^T \cdot A \cdot Q$ et f' l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{d-1}$ canoniquement associé à A'.
   (a) Montrer que A' est encore une matrice symétrique réelle.
   On admet alors qu'il existe $\left(e'_1, \ldots, e'_{d-1}\right)$ une base orthonormée de vecteurs de $\mathbb{R}^{d-1}$ telle que la matrice de f' dans cette base soit une matrice diagonale. On note $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{d-1}$ les coefficients diagonaux de cette matrice (éventuellement égaux) et on les suppose rangés dans l'ordre croissant.
   (b) Soit x,y deux vecteurs de $\mathbb{R}^{d-1}$ et X,Y les matrices colonnes de leurs coefficients dans la base canonique.
      i. Rappeler l'expression de $\langle x, y\rangle$ en fonction de X et Y.
      ii. Montrer que $\langle q(x), q(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
      iii. On pose $E'_k = \operatorname{Vect}(e'_1, \ldots, e'_k)$. Calculer $\dim\left(q\left(E'_k\right)\right)$.
   (c) En appliquant le résultat de la question 3 à la matrice A', montrer que
   $$\lambda'_k = \max_{z \in q\left(E'_k\right)^*} \frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle}.$$
   (d) En déduire de la question 4c que $\lambda'_k \geqslant \lambda_k$.
   (e) Montrer de façon similaire en utilisant maintenant la question 4d que $\lambda'_k \leqslant \lambda_{k+1}$.