Corrigé - Banque PT - Maths A - 2021
Version pour juniors

Les réponses en bleu sont les réponses des questions ajoutées ou modifiées par rapport sujet initial.

Probabilités

On étudie le processus de fonctionnement d'un appareil utilisé chaque jour dans une usine et susceptible de subir des pannes accidentelles. On fait les hypothèses suivantes :

- Le comportement de l'appareil au jour $n+1$ ne dépend que de son état au jour n et pas des jours précédents.
- Si l'appareil fonctionne le jour n, il a une probabilité α d'être en panne le jour $n+1$.
- Si l'appareil est en panne au jour n, il a une probabilité β d'être réparé et de fonctionner le jour $n+1$.
- On a $0<\alpha<1$ et $\beta>0$.

Formellement, si l'on appelle X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si l'appareil fonctionne le jour n et 0 si l'appareil est en panne le jour n, on a

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=0 \mid X_n=1\right)=\alpha,$$
$$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=1 \mid X_n=0\right)=\beta.$$

1. On note $p_n=\mathbb{P}\left(X_n=1\right)$.

   (a) La famille $\left(\left(X_1=0\right),\left(X_1=1\right)\right)$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,

   $$\begin{aligned} p_2=\mathbb{P}\left(X_2=1\right) &= \mathbb{P}\left(X_2=1 \mid X_1=1\right)\mathbb{P}\left(X_1=1\right)+\mathbb{P}\left(X_2=1 \mid X_1=0\right)\mathbb{P}\left(X_1=0\right)\\ &=(1-\alpha)\, p_1+\beta\left(1-p_1\right)\\ &=(1-\alpha-\beta)\, p_1+\beta. \end{aligned}$$

   Conclusion,

   $$\boxed{p_2=(1-\alpha-\beta)\, p_1+\beta.}$$

   (b) Soit $n \geqslant 1$. De même que dans la question précédente, $\left(\left(X_n=0\right),\left(X_n=1\right)\right)$ forme un système complet d'évènements, donc par la formule des probabilités totales,

   $$\begin{aligned} p_{n+1}=\mathbb{P}\left(X_{n+1}=1\right) &= \mathbb{P}\left(X_{n+1}=1 \mid X_n=1\right)\mathbb{P}\left(X_n=1\right)+\mathbb{P}\left(X_{n+1}=1 \mid X_n=0\right)\mathbb{P}\left(X_n=0\right)\\ &=(1-\alpha)\, p_n+\beta\left(1-p_n\right)\\ &=(1-\alpha-\beta)\, p_n+\beta. \end{aligned}$$

   Conclusion, on obtient bien que

   $$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad p_{n+1}=\beta+(1-\alpha-\beta)\, p_n.}$$

   (c) Par la question précédente, la suite $\left(p_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique. Soit $\omega \in \mathbb{R}$,

   $$\begin{aligned} \omega=\beta+(1-\alpha-\beta)\,\omega \quad &\Leftrightarrow \quad (\alpha+\beta)\,\omega=\beta \\ &\Leftrightarrow \quad \omega=\frac{\beta}{\alpha+\beta} \qquad \text{car par hypothèse } \alpha+\beta>0. \end{aligned}$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = p_n - \omega$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$r_{n+1} = \beta + (1-\alpha-\beta)\,p_n - \omega = \beta + (1-\alpha-\beta)\,p_n - (\beta + (1-\alpha-\beta)\,\omega) = (1-\alpha-\beta)\,r_n.$$

Donc $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $1-\alpha-\beta$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = r_n + \omega = (1-\alpha-\beta)^{n-1}\,r_1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = (1-\alpha-\beta)^{n-1}\left(p_1 - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = (1-\alpha-\beta)^{n-1}\left(p_1 - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}.}$$

(d) On observe que par hypothèses sur α et β,

$$-1 \leqslant -\beta < 1-\alpha-\beta < 1.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-\alpha-\beta)^{n-1} = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{\beta}{\alpha+\beta}.}$$

On retrouve dans ce cas particulier, le fait que la probabilité converge exponentiellement vite vers ce que l'on appelle une mesure invariante et ce qui est joli c'est que cette mesure invariante/état stationnaire ne dépend pas de p_1 i.e. des probabilités initiales.

2. On suppose dans cette question que $p_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$.

(a) On observe que $X_2(\Omega) = [\![0;1]\!]$ et plus précisément que $X_2 \sim \mathscr{B}(p_2)$. De plus, d'après la question 1. on a

$$p_2 = (1-\alpha-\beta)\,p_1 + \beta = (1-\alpha-\beta)\,\frac{\beta}{\alpha+\beta} + \beta = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,(1-\alpha-\beta+\alpha+\beta) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$

Conclusion,

$$\boxed{X_2 \sim \mathscr{B}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right).}$$

Voilà qui justifie a posteriori pourquoi je vous ai parlé de « mesure invariante ». Si vous démarrez en régime stationnaire, $X_1 \sim \mathscr{B}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)$, alors vous y... stationnez : $X_2 \sim X_1 \sim \mathscr{B}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)$.

(b) On note que l'univers image de (X_1, X_2) est $[\![0;1]\!]^2$. De plus, par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1=0, X_2=0) = \mathbb{P}(X_2=0 \mid X_1=0)\,\mathbb{P}(X_1=0) &= (1-\beta)\,(1-p_1)\\ &= (1-\beta)\left(1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\\ &= \frac{(1-\beta)\,\alpha}{\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1=1, X_2=0) &= \mathbb{P}(X_2=0 \mid X_1=1)\,\mathbb{P}(X_1=1) = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\\ \mathbb{P}(X_1=0, X_2=1) &= \mathbb{P}(X_2=1 \mid X_1=0)\,\mathbb{P}(X_1=0) = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\\ \mathbb{P}(X_1=1, X_2=1) &= \mathbb{P}(X_2=1 \mid X_1=1)\,\mathbb{P}(X_1=1) = \frac{(1-\alpha)\,\beta}{\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

Conclusion, on obtient le tableau suivant :

$X_2=i\backslash X_1=j$	0	1
0	$\frac{(1-\beta)\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$
1	$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$	$\frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha+\beta}$

On pense à contrôler son résultat, on a bien $\frac{(1-\beta)\alpha}{\alpha+\beta}+2\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}+\frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha-\alpha\beta+2\alpha\beta+\beta-\alpha\beta}{\alpha+\beta}=1$, *OK !*

(c) Puisque $X_1\sim X_2\sim\mathscr{B}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)$, on a directement

$$\boxed{\mathbb{E}(X_1)=\mathbb{E}(X_2)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

et

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1)=\mathbb{V}(X_2)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}.}$$

(d) On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X_1,X_2)&=\mathbb{E}(X_1X_2)-\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) && \text{par définition}\\
&=\sum_{0\leqslant i,j\leqslant 1} ij\mathbb{P}(X_1=i,X_2=j)-\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 && \text{par le théorème de transfert et la question précédente}\\
&=0+1\times\frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha+\beta}-\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 && \text{par la question (b)}\\
&=\frac{\beta}{(\alpha+\beta)^2}((1-\alpha)(\alpha+\beta)-\beta)\\
&=\frac{\beta}{(\alpha+\beta)^2}(\alpha-\alpha^2-\alpha\beta)\\
&=\frac{\alpha\beta(1-\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)^2}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Cov}(X_1,X_2)=\frac{\alpha\beta(1-\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)^2}.}$$

(e) **Premier cas,** si $\alpha+\beta\neq 1$. Alors, comme $\alpha>0$ et $\beta>0$, on en déduit que $\operatorname{Cov}(X_1,X_2)\neq 0$. Les variables X_1 et X_2 sont corrélées et DONC non indépendantes *Attention, la réciproque est fausse, des variables peuvent être non corrélées ET non indépendantes, le fait d'être non corrélés n'implique pas d'être non indépendante.*

Second cas, si $\alpha+\beta=1$ i.e. $\beta=1-\alpha$. Alors par la question (b) on a

$X_2=i\backslash X_1=j$	0	1
0	α^2	$\alpha(1-\alpha)$
1	$\alpha(1-\alpha)$	$(1-\alpha)^2$

De plus, $X_1\sim X_2\sim\mathscr{B}(1-\alpha)$. Dans ce cas on observe bien que

$$\forall(i,j)\in[\![0;1]\!]^2,\qquad \mathbb{P}(X_1=i,X_2=j)=\mathbb{P}(X_1=i)\mathbb{P}(X_2=j)$$

et donc les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.

Conclusion,

$$\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes si et seulement si } \alpha+\beta=1.}$$

3. On suppose maintenant que l'appareil est en fonctionnement le premier jour. On note N le numéro du jour où cet appareil tombe en panne pour la première fois. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'évènement $(N-1=k) = (N=k+1)$ correspond au fait que l'appareil fonctionne les k premiers jours et tombe en panne le jour $k+1$. On obtient donc

$$\boxed{(N-1=k) = (N=k+1) = (X_1=1, X_2=1, \ldots, X_k=1, X_{k+1}=0)\,.}$$

Donc par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(N-1=k\right) &= \mathbb{P}\left(X_{k+1}=0 \mid X_k=1\right) \\ &\quad \times \mathbb{P}\left(X_k=1 \mid X_{k-1}=1\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(X_2=1 \mid X_1=1\right)\mathbb{P}\left(X_1=1\right) \\ &= \alpha \times (1-\alpha) \times \cdots \times (1-\alpha) \times 1 \\ &= \alpha\,(1-\alpha)^{k-1}\,.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}\left(N-1=k\right) = \alpha\,(1-\alpha)^{k-1}\,.}$$

Ainsi, on dit qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p \in [0;1]$ si et seulement si

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \textit{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}\left(X=k\right) = p\,(1-p)^{k-1}\,.$$

On note alors $X \sim \mathscr{G}(p)$.

4. On considère Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. On appelle alors fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, la fonction définie sur $[0;1]$ par

$$\forall t \in [0;1]\,, \quad G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k\,\mathbb{P}\left(X=k\right).$$

Montrons que G_X est bien définie sur $[0;1[$. Soit $t \in [0;1[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(X=k\right) \leqslant 1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leqslant t^k\,\mathbb{P}\left(X=k\right) \leqslant t^k.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}} t^k$ converge en tant que série géométrique de raison $t \in [0;1[\, \subseteq\,]-1;1[$. Donc, par le théorème de comparaison pour les séries numériques à termes positifs, $\sum_{k\in\mathbb{N}} t^k\,\mathbb{P}\left(X=k\right)$ converge et donc $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k\,\mathbb{P}\left(X=k\right)$ existe. Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in [0;1[\,, \quad G_X(t) \text{ existe.}}$$

On admet que pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X=k\right) = 1$ et que donc G_X est bien définie en 1 et $G_X(1) = 1$.

(a) Soit $t \in [0;1]$. Puisque $Y_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} G_{Y_1}(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} t^k \mathbb{P}(Y_1 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} t^k p (1-p)^{k-1} \\ &= tp \sum_{k=1}^{+\infty} (t(1-p))^{k-1} \\ &= tp \sum_{k=0}^{+\infty} (t(1-p))^{k} \\ &= \frac{tp}{1-t(1-p)}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in [0;1], \qquad G_{Y_1}(t) = \frac{tp}{1-t(1-p)}.}$$

(b) Puisque Y_1 et Y_2 sont indépendantes, on en déduit que $G_{Y_1+Y_2} = G_{Y_1} \times G_{Y_2}$ *(nous l'avons vu pour des variables finies mais cela fonctionne encore pour des variables à valeurs dans $\mathbb{N}^*$).* Ainsi,

$$\forall t \in [0;1], \qquad G_{Y_1+Y_2}(t) = G_{Y_1}(t) G_{Y_2}(t).$$

Or $Y_1 \sim Y_2 \sim \mathscr{G}(p)$. Donc par la question précédente,

$$\boxed{\forall t \in [0;1], \qquad G_{Y_1+Y_2}(t) = \left(\frac{tp}{1-t(1-p)}\right)^2.}$$

(c) On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_X(n) = \mathbb{P}(X \leqslant n).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, puisque $Y_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a $F_{Y_1}(0) = \mathbb{P}(Y_1 \leqslant 0) = 0$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$\mathbb{P}(Y_1 \leqslant n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y_1 = k) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k = p \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^n.$$

On note que la formule reste vraie si $n = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{Y_1}(n) = 1-(1-p)^n.}$$

La fonction de répartition est un autre outil mathématique (avec la fonction génératrice) qui permet de caractérisée entièrement la loi d'une variable aléatoire. A chaque loi correspond une et une seule fonction de répartition. Ainsi, si vous calculez la fonction de répartition d'une variable aléatoire et que vous reconnaissez une fonction de répartition connue, vous pouvez en déduire la loi de la variable aléatoire associée. C'est le sens de la question qui suit.

On pose $Z = \min(Y_1, Y_2)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On observe astucieusement (mais c'est un classique !) que

$$\begin{aligned} F_Z(n) &= \mathbb{P}(Z \leqslant n) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Z > n) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\min(Y_1, Y_2) > n) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Y_1 > n, Y_2 > n) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Y_1 > n)\mathbb{P}(Y_2 > n) && \text{car } Y_1 \text{ et } Y_2 \text{ sont indépendantes} \\ &= 1 - (1 - F_{Y_1}(n))(1 - F_{Y_2}(n)). \end{aligned}$$

Comme $Y_1 \sim Y_2 \sim \mathscr{G}(p)$, par la question précédente,

$$F_Z(n) = 1 - (1-p)^n (1-p)^n = 1 - (1-p)^{2n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_Z(n) = 1 - (1-p)^{2n}.}$$

On constate que

$$F_Z(n) = 1 - \left((1-p)^2\right)^n = 1 - \left(1 - 2p + p^2\right)^n.$$

Conclusion, on reconnaît alors

$$\boxed{\text{la fonction de répartition d'une loi géométrique de raison } q = 2p - p^2 = p\,(2-p).}$$

Pour les curieux

Proposition .1

La fonction de répartition caractérise la loi. Autrement dit pour X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, si $F_X = F_Y$ alors $X \sim Y$.

Démonstration. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $F_X = F_Y$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = n) &= \mathbb{P}(X \leqslant n) - \mathbb{P}(X < n) \\
&= \mathbb{P}(X \leqslant n) - \mathbb{P}(X \leqslant n-1) && \text{car } X(\Omega) \subseteq \mathbb{N} \\
&= F_X(n) - F_X(n-1) \\
&= F_Y(n) - F_Y(n-1) && \text{car } F_X = F_Y \\
&= \mathbb{P}(Y = n).
\end{aligned}$$

Enfin, si $n = 0$, $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X \leqslant 0)$ car $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$. Donc

$$\mathbb{P}(X = 0) = F_X(0) = F_Y(0) = \mathbb{P}(Y = 0).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n)$ ce qui démontre bien que X et Y sont de même loi (on rappelle bien que cela ne signifie pas que les variables aléatoires sont égales).

□

A l'aide de ce résultat de seconde année et du calcul précédent, on peut en déduire que $Z \sim \mathscr{G}(p(2-p))$.

(d) On pose $T = \max(Y_1, Y_2)$.
On procède comme dans la question précédente. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
F_T(n) = \mathbb{P}(T \leqslant n) &= \mathbb{P}(\max(Y_1, Y_2) \leqslant n) \\
&= \mathbb{P}(Y_1 \leqslant n, Y_2 \leqslant n) \\
&= \mathbb{P}(Y_1 \leqslant n)\,\mathbb{P}(Y_2 \leqslant n) && \text{car } Y_1 \text{ et } Y_2 \text{ sont indépendantes} \\
&= F_{Y_1}(n) F_{Y_2}(n) \\
&= (1 - (1-p)^n)(1 - (1-p)^n) \\
&= 1 - 2(1-p)^n + (1-p)^{2n}.
\end{aligned}$$

On ne reconnaît pas directement une fonction de répartition connue. On procède donc comme dans la démonstration de la proposition précédente. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T=n) &= \mathbb{P}(T \leqslant n) - \mathbb{P}(T \leqslant n-1) \\ &= F_T(n) - F_T(n-1) \\ &= 1-2(1-p)^n + (1-p)^{2n} - \left[1-2(1-p)^{n-1} + (1-p)^{2n-2}\right] \\ &= 2(1-p)^{n-1}(-(1-p)+1) + (1-p)^{2n-2}\left((1-p)^2-1\right) \\ &= 2p(1-p)^{n-1} + (1-p)^{2n-2}\left(-2p+p^2\right) \\ &= 2p(1-p)^{n-1} - p(2-p)(1-p)^{2n-2}.\end{aligned}$$

Si $n=0$, $\mathbb{P}(T=0)=0$. Conclusion, la loi de T est donnée par

$$\boxed{T(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(T=n) = 2p(1-p)^{n-1} - p(2-p)(1-p)^{2n-2}.}$$

5. Soit $Y \sim \mathscr{G}(p)$ une loi géométrique de paramètre $p \in \,]0;1[$. Démontrons le résultat suivant bien connu en seconde année : $\mathbb{E}(Y)$ existe et $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p}$. La série numérique associé à l'espérance de Y est donnée par $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\mathbb{P}(Y=k)$. Notez que contrairement à la première année où les sommes sont toujours finies, il n'est pas évident pour des variables à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ tout entier que l'espérance existe. Ici pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$k\mathbb{P}(Y=k) = kp(1-p)^{k-1}.$$

Dès lors, $k^2 \times k\mathbb{P}(Y=k) = k^3 p(1-p)^{k-1}$. Or $0 < 1-p < 1$ donc par croissance comparée,

$$\lim_{k\to+\infty} k^3 p(1-p)^{k-1} = 0.$$

On en déduit qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$,

$$0 \leqslant k^3 p(1-p)^{k-1} \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant k\mathbb{P}(Y=k) \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

Or la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\mathbb{P}(Y=k)$ converge et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(Y=k)$ existe ou encore

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) \text{ existe.}}$$

L'énoncé admet que $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p}$. Démontrons-le par deux méthodes.

Méthode 1, par changement d'indice. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(Y=k)$. Alors,

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n kp(1-p)^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)p(1-p)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} kp(1-p)^k + \sum_{k=0}^{n-1} p(1-p)^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} kp(1-p)^k - np(1-p)^n + p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} \\ &= (1-p)S_n - np(1-p)^n + 1 - (1-p)^{n+1}.\end{aligned}$$

Ainsi,
$$pS_n = 1 - (1-p)^{n+1} - np(1-p)^n.$$
Donc par passage à la limite quand $n \to +\infty$,
$$p\mathbb{E}(Y) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p}.$$

Méthode 2, par la série génératrice. Soit $t \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : t \mapsto \sum_{k=1}^{n} t^k \mathbb{P}(Y=k)$ est dérivable sur $[0;1]$ comme fonction polynomiale et pour tout $t \in [0;1]$,
$$f_n'(t) = \sum_{k=1}^{n} kt^{k-1}\mathbb{P}(Y=k).$$
D'autre part, pour tout $t \in [0;1]$,
$$\begin{aligned} f_n(t) &= \sum_{k=1}^{n} t^k p(1-p)^{k-1} \\ &= pt\sum_{k=0}^{n-1}(t(1-p))^k \\ &= pt\frac{1-(t(1-p))^n}{1-t(1-p)} && \text{car } t(1-p) \leqslant 1-p < 1. \\ &= pt\frac{1-t^n(1-p)^n}{1-t(1-p)} \end{aligned}$$
Donc pour tout $t \in [0;1]$,
$$f_n'(t) = p\frac{1-t^n(1-p)^n}{1-t(1-p)} + pt\frac{-nt^{n-1}(1-p)^n(1-t(1-p)) + (1-p)(1-t^n(1-p)^n)}{(1-t(1-p))^2}.$$
Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, pour tout $t \in [0;1]$, par croissance comparée car $0 < 1-p < 1$,
$$\sum_{k=1}^{+\infty} kt^{k-1}\mathbb{P}(Y=k) = \frac{p}{1-t(1-p)} + pt\frac{1-p}{(1-t(1-p))^2}$$
On récupère en réalité $G_Y'(t)$ dans cette égalité. Notamment pour $t=1$, on retrouve la formule bien connue de $G_Y'(1) = \mathbb{E}(Y)$. Pour $t=1$, on obtient
$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(Y=k) = 1 + \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p}.}$$
L'usine est équipée de deux appareils dont on suppose les comportements indépendants l'un de l'autre. On suppose que les deux appareils sont en fonctionnement le premier jour. Pour $i \in \{0;1\}$, on note N_i le premier jour pour lequel l'appareil i tombe en panne et on note Z le **nombre** de jours à attendre avant la première panne. Puisque les deux appareils fonctionnent le premier jour, on a par la question 3. que $N_1 - 1 \sim N_2 - 1 \sim \mathscr{G}(\alpha)$. D'autre part, on a $Z = \min(N_1, N_2) - 1 = \min(N_1 - 1, N_2 - 1)$ *(l'énoncé est un peut vague sur la façon de compter les jours. On compte ici le nombre de jours qu'il faut attendre avant la première panne. Le premier jour donc ne compte pas comme un jour à attendre).* Comme N_1 et N_2 sont indépendantes, $Y_1 = N_1 - 1$ et $Y_2 = N_2 - 1$ également donc par ce qui précède,
$$Z \sim \mathscr{G}(p(2-p)).$$

Posons $q = p(2-p)$. On en déduit de ce qui précède, que

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{q}.$$

Conclusion, en moyenne, la première panne se produit au bout de

$$\boxed{\frac{1}{p(2-p)} \text{ jours.}}$$

Algèbre linéaire

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ ($d \geqslant 2$) muni du produit scalaire usuel noté $\langle x, y\rangle$ entre les vecteurs x et y. Le vecteur nul de $\mathbb{R}_d$ sera noté 0.
Dans tout le problème, si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$, on note V^* l'ensemble $V \setminus \{0\}$.
Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^d$, pour tout entier $n \geqslant 1$, on note f^n la composée n-fois de l'application f :

$$f = \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

Si A est une matrice de taille $n \times p$, on note A^T sa transposée.

Partie I

1. On considère la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à B.

(a) Bon, en gros, la question consiste à diagonaliser la matrice, ce qui sera une question classique de seconde année. Cherchons d'abord ce que l'on appelle les valeurs propres de B. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminons $\mathrm{Ker}\,(B - \lambda I_3)$. Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
& X \in \mathrm{Ker}\,(B - \lambda I_3) \\
\Leftrightarrow\quad & (B - \lambda I_3)\, X = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & -1 \\ -3 & 3-\lambda & -3 \\ -1 & -3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} (1-\lambda)\, x - 3y - z = 0 \\ -3x + (3-\lambda)\, y - 3z = 0 \\ -x - 3y + (1-\lambda)\, z = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} -x - 3y + (1-\lambda)\, z = 0 \\ -3x + (3-\lambda)\, y - 3z = 0 \\ (1-\lambda)\, x - 3y - z = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_3
\end{aligned}$$

Par l'algorithme du pivot de Gauss,

$$\begin{aligned}
& X \in \operatorname{Ker}(B-\lambda I_3) \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -x-3y+(1-\lambda)\,z=0 \\ (3-\lambda+9)\,y+(-3-3+3\,\lambda)\,z=0 \\ -3\,(1+1-\lambda)\,y+\left(-1+(1-\lambda)^2\right)z=0 \end{cases} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+(1-\lambda)\,L_1 \end{array} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -x-3y+(1-\lambda)\,z=0 \\ (12-\lambda)\,y+3\,(\lambda-2)\,z=0 \\ -3\,(2-\lambda)\,y+\left(-2\,\lambda+\lambda^2\right)z=0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -x-3y+(1-\lambda)\,z=0 \\ (12-\lambda)\,y+3\,(\lambda-2)\,z=0 \\ -3\,(2-\lambda)\,y+\lambda\,(\lambda-2)\,z=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Supposons $\lambda \neq 2$. Alors,

$$\begin{aligned}
& X \in \operatorname{Ker}(B-\lambda I_3) \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -x-3y+(1-\lambda)\,z=0 \\ (12-\lambda)\,y+3\,(\lambda-2)\,z=0 \\ 3y+\lambda\,z=0 \end{cases} & L_3 \leftarrow \frac{1}{\lambda-2}L_3 \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -x-3y+(1-\lambda)\,z=0 \\ 3y+\lambda\,z=0 \\ (12-\lambda)\,y+3\,(\lambda-2)\,z=0 \end{cases} & L_2 \leftrightarrow L_3 \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -x-3y+(1-\lambda)\,z=0 \\ 3y+\lambda\,z=0 \\ 9\,(\lambda-2)\,z-(12-\lambda)\,\lambda\,z=0 \end{cases} & L_3 \leftarrow 3L_3-(12-\lambda)\,L_2 \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -x-3y+(1-\lambda)\,z=0 \\ 3y+\lambda\,z=0 \\ \left(\lambda^2-3\,\lambda-18\right)z=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de $\lambda^2-3\,\lambda-18$, $\Delta=9+72=81$. Donc les racines associées sont $\frac{3+9}{2}=6$ et $\frac{3-9}{2}=-3$. Donc si $\lambda \notin \{-3;2;6\}$, on obtient que

$$\begin{aligned}
X \in \operatorname{Ker}(B-\lambda I_3) \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x-3y+(1-\lambda)\,z=0 \\ 3y+\lambda\,z=0 \\ z=0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad x=y=z=0 \quad \Leftrightarrow \quad X=0.
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\boxed{\forall\,\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{-3;2;6\}, \qquad \operatorname{Ker}(B-\lambda I_3)=\{0\}.}$$

Si $\lambda=2$, alors, par ce qui précède,

$$\begin{aligned}
X \in \operatorname{Ker}(B-2I_3) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x-3y-z=0 \\ 10y=0 \\ 0=0 \end{cases} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z=-x \\ y=0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad X=\begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(B-2I_3)=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right).}$$

On vérifie que $B\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&-1\\-3&3&-3\\-1&-3&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$. *OK !*

Si $\lambda=-3$, on trouve alors que

$$\begin{aligned}X\in\mathrm{Ker}\,(B+3I_3)\quad&\Leftrightarrow\quad\begin{cases}-x-3y+4z=0\\3y-3z=0\\0=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=-3y+4z=z\\y=z\end{cases}\\&\Leftrightarrow\quad X=\begin{bmatrix}z\\z\\z\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(B+3I_3)=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right).}$$

On vérifie que $B\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&-1\\-3&3&-3\\-1&-3&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}=-3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$. *OK !*

Enfin, si $\lambda=6$, alors,

$$\begin{aligned}X\in\mathrm{Ker}\,(B-6I_3)\quad&\Leftrightarrow\quad\begin{cases}-x-3y-5z=0\\3y+6z=0\\0=0\end{cases}\\&\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=-3y-5z=6z-5z=z\\y=-2z\end{cases}\\&\Leftrightarrow\quad X=\begin{bmatrix}z\\-2z\\z\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(B-6I_3)=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right).}$$

On vérifie que $B\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&-1\\-3&3&-3\\-1&-3&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$. *OK !*

(b) Poursuivons. Posons $\mathscr{B}_1=(u_1,u_2,u_3)=\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right)$ et $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Alors,

$$\begin{aligned}
\det\left(\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(\mathscr{B}_1\right)\right) &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\
&= -1 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} && \text{en développant par rapport à } C_1 \\
&= -\left(2+4\right) = -6 \neq 0.
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(\mathscr{B}_1\right)$ est inversible et donc

$$\boxed{\mathscr{B}_1 = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

De plus, on a $u_1 \in \mathrm{Ker}\left(B - 2I_3\right)$ i.e. $g\left(u_1\right) = 2u_1$, $u_2 \in \mathrm{Ker}\left(B + 3I_3\right)$ i.e. $g\left(u_2\right) = -3u_2$ et $u_3 \in \mathrm{Ker}\left(B - 6I_3\right)$ i.e. $g\left(u_3\right) = 6u_3$. D'où,

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}\left(g\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.}$$

NB : on peut contrôler un peu son résultat en constatant que, la trace étant invariante par changement de base, $Tr\left(B\right) = 1+3+1 = 5 = 2-3+6 = Tr\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\right)$. On approche de la fin de la question. Montrons que $\mathscr{B}_1$ est orthogonale i.e. $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_1, u_3\rangle = \langle u_2, u_3\rangle = 0$. On calcule :

$$\langle u_1, u_2\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0, \qquad \langle u_1, u_3\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0,$$

$$\langle u_2, u_3\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0.$$

Donc $\boxed{\mathscr{B}_1 = \left(u_1, u_2, u_3\right) \text{ est orthogonale.}}$ Pour finir, posons

$$e_1 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Par tout ce qui précède, $\boxed{\left(e_1, e_2, e_3\right) \text{ est orthonormée}}$ et

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\left(e_1,e_2,e_3\right)}\left(g\right) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.}$$

(c) Soit $x=\sum_{i=1}^{3} x_i e_i$. Puisque (e_1,e_2,e_3) est orthonormée on a directement (prop IV.1 du chap27)

$$\boxed{\langle x,x\rangle=\sum_{i=1}^{3} x_i^2.}$$

Par linéarité de g,

$$g(x)=\sum_{i=1}^{3} x_i g\left(e_i\right).$$

Or par ce qui précède, $g\left(e_1\right)=-3e_1$, $g\left(e_2\right)=2e_2$ et $g\left(e_3\right)=6e_3$. Ainsi,

$$\boxed{\langle g(x),x\rangle=\langle -3x_1e_1+2x_2e_2+6x_3e_3, x_1e_2+x_2e_2+x_3e_3\rangle=-3x_1^2+2x_2^2+6x_3^2.}$$

Par récurrence, on obtient pour tout $n\geqslant 1$, $g^n(x)=(-3)^n x_1e_1+2^nx_2e_2+6^nx_3e_3$. D'où,

$$\boxed{\forall n\geqslant 1,\qquad v_n(x)=\langle g^n(x),x\rangle=(-3)^n x_1^2+2^nx_2^2+6^nx_3^2.}$$

Dans la suite de cette partie, on notera $v_n(x)=\langle g^n(x),x\rangle$ pour tout entier $n\geqslant 1$ et tout vecteur $x\in\mathbb{R}^3$.

(d) Soit $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3\neq 0$. Supposons que $x_3\neq 0$. Alors par la question précédente,

$$v_n(x)=(-3)^n x_1^2+2^nx_2^2+6^nx_3^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 6^nx_3^2>0.$$

Donc il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n\geqslant 1$, $v_n(x)>0$ et notamment $v_n(x)\neq 0$.
Supposons maintenant que $x_3=0$ et $x_1\neq 0$, alors de même, $v_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}(-3)^n x_1^2$ donc tous les termes pairs à partir d'un certain rang seront strictement positifs et tous les termes impairs seront strictement négatifs. En particulier, à partir d'un certain rang, $v_n(x)\neq 0$.
Supposons maintenant que $x_1=x_3=0$. Comme $x\neq 0$, alors $x_2\neq 0$ et donc $v_n(x)=2^nx_2^2>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
Conclusion, dans tous les cas,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\},\ \exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\geqslant n_0, v_n(x)\neq 0.}$$

(e) Soit $x\in\mathbb{R}^3$ tel que $x_3\neq 0$. Alors par la question précédente, on a $v_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}6^nx_3^2>0$ et donc $v_{n-1}(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}6^{n-1}x_3^2>0$. Ainsi,

$$\frac{v_n(x)}{v_{n-1}(x)}\underset{n\to+\infty}{\sim}6.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n(x)}{v_{n-1}(x)}=6.}$$

2. On considère maintenant la matrice C suivante :

$$C=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$$

et h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à C.

(a) **Méthode 1.** On rappelle que $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Donc

$$h(e_1) = C \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = -3e_1$$

$$h(e_2) = C \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3e_2$$

$$h(e_3) = C \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3e_3.$$

Conclusion, la matrice de h dans la base (e_1, e_2, e_3) est bien diagonale, plus précisément,

$$\boxed{\mathrm{mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(h) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

Méthode 2. NON RECOMMANDEE ! Je vous l'écris simplement parce que j'ai un mot à vous dire sur P^{-1}. Notons $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(e_1, e_2, e_3)$. On a

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons P^{-1}. On a les opérations élémentaires suivantes :

$$P \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & -3 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \qquad I_3 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftrightarrow L_2 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 2 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \\ L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2 \end{matrix} \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 + L_3 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{\sqrt{12}} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}} L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{\sqrt{6}} L_3 \end{matrix} \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

On retrouve bien que P est inversible (ce que l'on savait puisque (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$) et

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pense bien à vérifier que $P^{-1}P = I_3$.

On observe que $P^{-1} = P^T$. Tiens, tiens, tiens... Serait-ce un hasard ? Pas du tout, le cours de seconde année nous apprendra que si P est une matrice de passage entre deux bases **orthonormées** alors on a $P^{-1} = P^T$ et on appelle ces matrices les matrices orthogonales (même si les bases ne sont pas juste orthogonales mais bien orthonormées, vilain piège). Si l'on avait su cela, nous aurions pu éviter le calcul précédent !
Dès lors, par la formule de changement de base, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(h) &= P^{-1}CP \\
&= P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -3\sqrt{3} & -3\sqrt{2} & 3 \\ 0 & -3\sqrt{2} & -6 \\ 3\sqrt{3} & -3\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion, la matrice de h dans la base (e_1, e_2, e_3) est bien diagonale, plus précisément,

$$\boxed{\operatorname{mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(h) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

Je le répète, tout comme le dit le rapport du jury, il fallait largement préconiser la méthode 1.

(b) Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}^3$, on pose $w_n(x) = \langle h^n(x), x\rangle$. On a $h(e_1) = 3e_1$ puis par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h^n(e_1) = 3^n e_1$. Ainsi,

$$w_n(e_1) = \langle h^n(e_1), e_1\rangle = \langle 3^n e_1, e_1\rangle = 3^n \|e_1\| = 3^n.$$

Dès lors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{w_n(e_1)}{w_{n-1}(e_1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{3^{n-1}} = 3.}$$

De même,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{w_n(e_2)}{w_{n-1}(e_2)} = -3 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{w_n(e_3)}{w_{n-1}(e_3)} = 3.}$$

(c) Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in \mathbb{R}^3$. De même qu'à la question 1.(c)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n(x) = 3^n x_1^2 + (-3)^n x_2^n + 3^n x_3^n = 3^n \left(x_1^2 + (-1)^n x_2^2 + x_3^2\right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
w_n(x) = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad x_1^2 + (-1)^n x_2^2 + x_3^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \qquad x = 0 \ \text{ OU } \ \left(n \text{ impair et } x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent pour que la suite $(w_n(x))_{n\geqslant 1}$ soit non nulle à partir d'un certain rang il faut et il suffit que $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \neq 0$. Conclusion,

$$\boxed{D = \left\{x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \neq 0\right\}.}$$

(d) On teste quelques vecteurs simples. Il faut garder du x_2 et de x_1 ou x_3. Prenons $x_0 = e_1+e_2+e_3$. Alors, $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ et donc $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$. Donc $x_0 \in D$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n(x) = 3^n\left(1 + (-1)^n + 1\right) = 3^n\left(2 + (-1)^n\right).$$

En conséquence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)} = 3\frac{2+(-1)^n}{2+(-1)^{n-1}} = \begin{cases} 9 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

La suite $\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ présente donc deux suites extraites qui convergent vers des limites différentes. Conclusion,

$$\boxed{\text{pour } x_0 = e_1+e_2+e_3 \text{ on a } x_0 \in D \text{ et la suite } \left(\frac{w_n(x_0)}{w_{n-1}(x_0)}\right)_{n\in\geqslant 1} \text{ diverge.}}$$

(e) Soit $x \in D$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{w_n(x)}{w_{n-2}(x)} = \frac{3^n\left(x_1^2 + (-1)^n x_2^2 + x_3^2\right)}{3^{n-2}\left(x_1^2 + (-1)^{n-2} x_2^2 + x_3^2\right)} = 9\frac{x_1^2 + (-1)^n x_2^2 + x_3^2}{x_1^2 + (-1)^n x_2^2 + x_3^2} = 9.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in D, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{w_n(x)}{w_{n-2}(x)} = 9.}$$

Partie II

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ une matrice symétrique réelle d'ordre d et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ canoniquement associé à A. On admet qu'il existe $(e_1,\dots,e_d)$ une base orthonormée de vecteurs de $\mathbb{R}^d$ telle que la matrice de f dans cette base soit une matrice diagonale. On note $\lambda_1,\dots,\lambda_d$ les coefficients diagonaux de cette matrice et on les suppose rangés dans l'ordre des valeurs absolues croissantes

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_d|.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, on note $u_n(x) = \langle f^n(x), x\rangle$ et on note D l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^d$ pour lesquels la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

1. On suppose que $|\lambda_{d-1}| \leqslant |\lambda_d|$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\langle x, e_d\rangle \neq 0$. On note $x_1,\dots,x_d$ les coordonnées de x dans $(e_1,\dots,e_d)$. Puisque la matrice de f est diagonale dans la base $(e_1,\dots,e_d)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f^n(x) = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k^n x_k e_k.$$

Puisque $(e_1,\dots,e_d)$ est orthonormée, on obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n(x) = \langle f^n(x), x\rangle = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k^n x_k^2$$

Par hypothèse on a pour tout $k \in [\![1;d-1]\!]$, $|\lambda_k| \leqslant |\lambda_{d-1}| < |\lambda_d|$. Donc pour tout $k \in [\![1;d-1]\!]$,

$$\lambda_k^n \underset{n\to+\infty}{\ll} \lambda_d^n.$$

De plus, $x_d = \langle x, e_d\rangle \neq 0$. Donc

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k^n x_k^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda_d^n x_d^2.$$

Comme $|\lambda_d| > |\lambda_{d-1}| \geqslant 0$ et $x_d \neq 0$, on a $\lambda_d\, x_d^2 \neq 0$. Nécessairement $x \in D$ et de plus,

$$\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda_d^n\, x_d^2}{\lambda_d^{n-1}\, x_d^2} = \lambda_d\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in D,\ \langle x, e_d\rangle \neq 0,\ \text{on a} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} = \lambda_d\,.}$$

2. On suppose maintenant que

(1) $$|\lambda_k| < |\lambda_d| \ \text{ et } \ \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_d$$

pour un certain $k < d$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\langle x, e_d\rangle \neq 0$. Notons $(x_1, \ldots, x_d)$ les coordonnées de x. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n\, x_i^2 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n\, x_i^2 + \lambda_d^n \sum_{i=k+1}^{d} x_i^2.$$

Puisque $x_d = \langle x, e_d\rangle \neq 0$, on a $\sum_{i=k+1}^{d} x_i^2 > 0$. De plus pour tout $i \leqslant k$, $|\lambda_i| < |\lambda_d|$ donc

$$u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda_d^n \sum_{i=k+1}^{d} x_i^2.$$

Comme $\lambda_d^n \sum_{i=k+1}^{d} x_i^2 \neq 0$, on en déduit que $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang i.e. $x \in D$ et

$$\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda_d^n \sum_{i=k+1}^{d} x_i^2}{\lambda_d^{n-1} \sum_{i=k+1}^{d} x_i^2} = \lambda_d\,.$$

Conclusion, dans ce cas, on a à nouveau,

$$\boxed{\forall x \in D,\ \langle x, e_d\rangle \neq 0,\ \text{on a} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} = \lambda_d\,.}$$

3. On suppose maintenant que $\lambda_{d-1} = -\,\lambda_d \neq 0$. Posons $x = e_{d-1} + 2e_d$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n\, x_i^2 = \lambda_{d-1}^n + 4\,\lambda_d^n = \underbrace{\lambda_d^n}_{\neq 0}\underbrace{(4 + (-1)^n)}_{\geqslant 3 > 0} \neq 0.$$

Donc $x \in D$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} = \frac{\lambda_d^n\,(4 + (-1)^n)}{\lambda_d^{n-1}\left(4 + (-1)^{n-1}\right)} = \begin{cases} \lambda_d\,\frac{5}{3} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \lambda_d\,\frac{3}{5} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Puisque $\lambda_d \neq 0$, alors $\lambda_d\,\frac{5}{3} \neq \lambda_d\,\frac{3}{5}$ et donc la suite $(u_n(x)/u_{n-1}(x))_{n\geqslant 1}$ admet deux sous-suites qui convergent vers des limites distinctes et donc

$$\boxed{\text{Pour } x = e_{d-1} + 2e_d, \text{ on a } x \in D \text{ et la suite } (u_n(x)/u_{n-1}(x))_{n\geqslant 1} \text{ diverge.}}$$

Partie III

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre d, non nulle, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ canoniquement associé à A. On admet toujours qu'il existe $(e_1, \dots, e_d)$ une base orthonormée de vecteurs de $\mathbb{R}^d$ telle que la matrice de f dans cette base soit une matrice diagonale. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ les coefficients diagonaux de cette matrice et on les suppose rangés par ordre croissant :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_d$$

Pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, on note

$$E_k = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_k) \text{ et } F_k = \operatorname{Vect}(e_k, \dots, e_d).$$

1. Soit $x \in F_k^*$. La famille $(e_k, \dots, e_d)$ est libre en tant que sous-famille de $(e_1, \dots, e_d)$ et engendre F_k. Donc $(e_k, \dots, e_d)$ est une base de F_k. Notons $(x_k, \dots, x_d)$ les coordonnées de x dans cette base. Comme la matrice de f dans $(e_1, \dots, e_d)$ est diagonale, on a

$$f(x) = \sum_{i=k}^{d} \lambda_i \, x_i e_i.$$

   Comme $(e_k, \dots, e_d)$ est orthonormée,

$$\langle f(x), x\rangle = \sum_{i=k}^{d} \lambda_i \, x_i^2.$$

   Pour tout $i \in [\![k; d]\!]$, $\lambda_i \geqslant \lambda_k$ et donc $\lambda_i \, x_i^2 \geqslant \lambda_k \, x_i^2$. Ainsi,

$$\langle f(x), x\rangle \geqslant \lambda_k \sum_{i=k}^{d} x_i^2.$$

   Or $x = \sum_{i=k}^{d} x_i e_i$ donc $\langle x, x\rangle = \sum_{i=k}^{d} x_i^2$. Comme $x \neq 0$, $\sum_{i=k}^{d} x_i^2 > 0$. Ainsi,

$$\frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \geqslant \lambda_k.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in F_k^*, \qquad \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \geqslant \lambda_k.}$$

2. Par la question précédente, λ_k est un minorant de l'ensemble on a $\left\{ \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \;\middle|\; x \in F_k^* \right\}$. De plus, posons $x = e_k$. Alors, $x \in F_k$ et $x \neq 0$ (car e_k fait partie d'une base donc ne peut pas être nul). Enfin,

$$\frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\langle \lambda_k \, e_k, e_k\rangle}{\|e_k\|^2} = \lambda_k.$$

   Par conséquent le minorant λ_k est atteint en un point de F_k^* et est donc un minimum :

$$\boxed{\min_{x \in F_k^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_k.}$$

3. On procède de même que précédemment. Soit $x \in E_k^*$. Alors il existe $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \setminus \{0_{\mathbb{R}^k}\}$ tel que $x = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i$. Dès lors,

$$\langle f(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, x_i^2.$$

Or $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k$. Donc

$$\langle f(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, x_i^2 \leqslant \lambda_k \sum_{i=1}^{k} x_i^2 = \lambda_k \langle x, x\rangle\,.$$

Puisque $x \neq 0$, $\langle x, x\rangle > 0$ et donc

$$\forall x \in E_k^*, \qquad \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \leqslant \lambda_k\,.$$

Donc λ_k est un majorant de $\left\{ \frac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle} \,\middle|\, x \in E_k^* \right\}$. De plus, $x = e_k \in E_k^*$ et on a vu que dans ce cas $\frac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle} = \lambda_k$. Donc ce majorant est atteint et est donc un maximum :

$$\boxed{\max_{x\in E_k^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_k\,.}$$

4. Pour tout entier k, $1 \leqslant k \leqslant d$, on note $\mathcal{V}_k$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$ de dimension k.

   (a) Soit $V \in \mathcal{V}_k$. Par la formule de Grassmann,

   $$\dim\left(V \cap F_k\right) = \dim\left(V\right) + \dim\left(F_k\right) - \dim\left(V + F_k\right).$$

   On a déjà vu que $(e_k, \ldots, e_d)$ est une base de F_k donc $\dim\left(F_k\right) = d-k+1$. De plus, V et F_k sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$ donc $V+F_k$ aussi et notamment $\dim\left(V + F_k\right) \leqslant \dim\left(\mathbb{R}^d\right) = d$. Ainsi,

   $$\dim\left(V \cap F_k\right) = k + d - k + 1 - \dim\left(V + F_k\right) \geqslant d + 1 - d = 1.$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\forall V \in \mathcal{V}_k, \qquad V \cap F_k \neq \{0\}\,.}$$

   (b) Soit $V \in \mathcal{V}_k$. Par la question précédente, $V \cap F_k \neq \{0\}$. Donc il existe $x_0 \in V \cap F_k$ tel que $x_0 \neq 0$. Puisque $x_0 \in V^*$, $\langle x_0, x_0\rangle \neq 0$ et $x_0 \in F_k^*$, par ce qui précède,

   $$\frac{\langle f\left(x_0\right), x_0\rangle}{\langle x_0, x_0\rangle} \geqslant \min_{x\in F_k^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_k\,.$$

   Donc, en admettant que le maximum dans V^* existe (l'énoncé aurait dû être plus explicite sur ce sujet), comme $x_0 \in V^*$, on obtient que

   $$\boxed{\forall V \in \mathcal{V}_k, \qquad \max_{x\in V^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \geqslant \lambda_k\,.}$$

   (c) De la question précédente, λ_k est un minorant de l'ensemble

   $$\left\{ \max_{x\in V^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \,\middle|\, V \in \mathcal{V}_k \right\}.$$

   Montrons que ce minorant est atteint. Posons $V = E_k$. Puisque $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base de E_k (génératrice par définition et libre en tant que sous-famille de $(e_1, \ldots, e_n)$ qui est une base). Donc $\dim\left(E_k\right) = k$ et ainsi, $E_k \in \mathcal{V}_k$. Par la question 3. on avait

   $$\max_{x\in E_k^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_k\,.$$

   Donc pour $V = E_k$, la valeur λ_k est bien atteinte. Conclusion, le minorant est un minimum :

   $$\boxed{\min_{V\in\mathcal{V}_k} \max_{x\in V^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_k\,.}$$

(d) Soit $V \in \mathcal{V}_{d-k+1}$. Comme précédemment, on note que

$$\dim(V \cap E_k) = \dim(V) + \dim(E_k) - \dim(V + E_k) \geqslant d - k + 1 + k - d = 1.$$

Donc $V \cap E_k \neq \{0\}$ ou encore, il existe $x_0 \in V \cap E_k$, $x_0 \neq 0$. Puisque $x_0 \in E_k^*$, par la question 3.,

$$\frac{\langle f(x_0), x_0 \rangle}{\langle x_0, x_0 \rangle} \leqslant \lambda_k\,.$$

Donc, sous réserve d'existence du minimum, ce que l'on admet, comme $x_0 \in V^*$, on a

$$\min_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \leqslant \frac{\langle f(x_0), x_0 \rangle}{\langle x_0, x_0 \rangle} \leqslant \lambda_k$$

Donc λ_k est un minorant. Montrons que c'est un minimum. Posons $V = F_k$. On a déjà vu que $\dim(V) = d - k + 1$. Donc $F_k \in \mathcal{V}_{d-k+1}$. Or par la question 2.

$$\min_{x \in F_k^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \lambda_k\,.$$

Donc λ_k est une valeur atteinte pour $V = F_k^*$. Conclusion, λ_k est bien un minimum :

$$\boxed{\min_{V \in \mathcal{V}_{d-k+1}} \max_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \lambda_k\,.}$$

5. Soit Q une matrice de taille $d \times (d-1)$ telle que $Q^T Q = I_{d-1}$ et soit q l'application linéaire de $\mathbb{R}^{d-1}$ dans $\mathbb{R}^d$ canoniquement associée à Q. On pose alors $A' = Q^T \cdot A \cdot Q$ et f' l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{d-1}$ canoniquement associé à A'.

(a) En voilà une question plus gentille. On a

$$(A')^T = \left(Q^T A Q\right)^T = Q^T A^T \left(Q^T\right)^T = Q^T A Q = A' \qquad \text{car } A \text{ est symétrique.}$$

Conclusion, (Q à coefficients réels puisque l'énoncé parle de q de $\mathbb{R}^{d-1}$ dans $\mathbb{R}^d$ et A aussi)

$$\boxed{A' \text{ est une matrice symétrique réelle.}}$$

On admet alors qu'il existe $\left(e'_1, \ldots, e'_{d-1}\right)$ une base orthonormée de vecteurs de $\mathbb{R}^{d-1}$ telle que la matrice de f' dans cette base soit une matrice diagonale. On note $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{d-1}$ les coefficients diagonaux de cette matrice (éventuellement égaux) et on les suppose rangés dans l'ordre croissant.

(b) Soit x,y deux vecteurs de $\mathbb{R}^{d-1}$ et X,Y les matrices colonnes de leurs coefficients dans la base canonique.

i. Des questions faciles en fin de sujet : cela nous rappelle qu'il faut bien lire l'intégralité d'un sujet avant de le commencer. Par le cours, on a directement, en notant $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{d-1} \end{bmatrix}$ et $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{bmatrix}$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{d-1} x_i y_i.$$

Conclusion,

$$\boxed{\langle x, y \rangle = X^T Y.}$$

ii. Par le chapitre sur la représentation matricielle, on sait que, en notant $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$, on a $\text{mat}_{\mathscr{C}}\left(q(x)\right) = QX$ et $\text{mat}_{\mathscr{C}}\left(q(y)\right) = QY$. Donc de même que dans la question précédente (mais dans $\mathbb{R}^d$ cette fois-ci)

$$\langle q(x), q(y)\rangle = (QX)^T QY = X^T Q^T QY.$$

Or par hypothèse, $Q^T Q = I_{d-1}$. Donc

$$\boxed{\langle q(x), q(y)\rangle = X^T Y = \langle x, y\rangle .}$$

iii. On pose $E'_k = \text{Vect}\left(e'_1, \ldots, e'_k\right)$. Par linéarité de q, on a

$$q\left(E'_k\right) = \text{Vect}\left(q\left(e'_1\right), \ldots, q\left(e'_k\right)\right).$$

Donc $\left(q\left(e'_1\right), \ldots, q\left(e'_k\right)\right)$ engendre $q\left(E'_k\right)$. Montrons que cette famille libre. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, q\left(e'_i\right) = 0.$$

Alors, pour tout $j \in [\![1; k]\!]$,

$$\begin{aligned}
0 = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, q\left(e'_i\right), q\left(e'_j\right) \right\rangle &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left\langle q\left(e'_i\right), q\left(e'_j\right)\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left\langle e'_i, e'_j\right\rangle && \text{par la question précédente} \\
&= 0 + \lambda_j \left\langle e'_j, e'_j\right\rangle + 0 \\
&= \lambda_j \left\|e_j\right\|^2 = \lambda_j && \text{car la famille } \left(e'_1, \ldots, e'_d\right) \text{ est orthonormée.}
\end{aligned}$$

Donc $\lambda_j = 0$. Ceci étant vrai pour $j \in [\![1; k]\!]$, on en déduit que $\left(q\left(e'_1\right), \ldots, q\left(e'_k\right)\right)$ est libre et de plus elle engendre $q\left(E'_k\right)$, donc est une base de $q\left(E'_k\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\dim\left(q\left(E'_k\right)\right) = \text{Card}\left(q\left(e'_1\right), \ldots, q\left(e'_k\right)\right) = k.}$$

L'idée de cette question est de voir que $(e_1, \ldots, e_k)$ est orthonormée et q préserve le produit scalaire et donc la norme. Ainsi, $\left(q\left(e'_1\right), \ldots, q\left(e'_k\right)\right)$ est aussi orthonormée et est donc libre. Le rapport du jury souligne qu'il suffisait de dire que cette famille est orthogonale, ce qui est insuffisant à mon sens car il faut aussi que chaque vecteur image $q\left(e'_i\right)$ soit non nul (ce qui n'est pas garanti par le caractère orthogonal mais par le caractère normé). Vous verrez en seconde année qu'une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

(c) Par la question 3. appliquée à A', on obtient

$$\lambda'_k = \max_{x \in \left(E'_k\right)^*} \frac{\langle f'(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle}.$$

Soit $x \in \left(E'_k\right)^*$ et X sa représentation matricielle dans la base canonique. Posons $z = q(x)$. La représentation matricielle de z dans la base canonique est alors donnée par QX. Dès lors,

$$\begin{aligned}
\left\langle f'(x), x\right\rangle = X^T \left(A'\right)^T X &= X^T A' X && \text{car } A' \text{ est symétrique} \\
&= X^T Q^T A Q X \\
&= X^T Q^T A^T Q X && \text{car } A \text{ est symétrique} \\
&= (AQX)^T QX \\
&= \langle f(z), z\rangle .
\end{aligned}$$

De même,
$$\langle z, z\rangle = (QX)^T (QX) = X^T Q^T Q X = X^T X = \langle x, x\rangle .$$
Puisque $x \neq 0$, alors $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 \neq 0$ et donc $\langle z, z\rangle \neq 0$ et $z \neq 0$. Donc
$$\forall x \in \left(E_k'\right)^*, \ \exists z \in q\left(E_k'\right)^*, \qquad \frac{\langle f'(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle}.$$
Autrement dit,
$$\left\{ \frac{\langle f'(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \;\middle|\; x \in \left(E_k'\right)^* \right\} \subseteq \left\{ \frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle} \;\middle|\; z \in q\left(E_k'\right)^* \right\}$$
Réciproquement, soit $z \in q\left(E_k'\right)^*$. Alors, $z \neq 0$ et il existe $x \in E_k'$ tel que $z = q(x)$. Puisque $z \neq 0$, alors, par linéarité de q, $x \neq 0$. Donc $x \in \left(E_k'\right)^*$. De plus comme $z = q(x)$, par ce qui précède, on a toujours $\frac{\langle f'(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle}$. Ainsi,
$$\forall z \in q\left(E_k'\right)^*, \ \exists x \in \left(E_k'\right)^*, \qquad \frac{\langle f'(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle}.$$
D'où
$$\left\{ \frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle} \;\middle|\; z \in q\left(E_k'\right)^* \right\} \subseteq \left\{ \frac{\langle f'(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \;\middle|\; x \in \left(E_k'\right)^* \right\}.$$
Et par suite,
$$\left\{ \frac{\langle f'(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \;\middle|\; x \in \left(E_k'\right)^* \right\} = \left\{ \frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle} \;\middle|\; z \in q\left(E_k'\right)^* \right\}$$
En particulier,
$$\max_{x \in \left(E_k'\right)^*} \frac{\langle f'(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \max_{z \in q\left(E_k'\right)^*} \frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\lambda_k = \max_{z \in q\left(E_k'\right)^*} \frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle}.}$$

(d) Posons $V_0 = q\left(E_k'\right)$. Par la question 5.(b)iii $\dim\left(V_0\right) = k$ i.e. $V_0 \in \mathcal{V}_k$. Donc par la question (4.c)
$$\max_{z \in q\left(E_k'\right)^*} \frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle} \geqslant \min_{V \in \mathcal{V}_k} \max_{z \in V^*} \frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle} = \lambda_k .$$
Par la question précédente, on en conclut que
$$\boxed{\lambda_k' \geqslant \lambda_k .}$$

(e) Posons $F_k' = \operatorname{Vect}\left(e_k', \ldots, e_{d-1}'\right)$. Par la question 2. appliquée à A', on a
$$\min_{x \in F_k^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_k' .$$
Or de même que précédemment, (il suffit juste de changer les vecteurs $e_1', \ldots, e_k'$ par les vecteurs $e_k', \ldots, e_{d-1}'$) on montre que
$$\max_{x \in \left(F_k'\right)^*} \frac{\langle f'(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \max_{z \in q\left(F_k'\right)^*} \frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle}.$$
Donc
$$\lambda_k' = \max_{z \in q\left(F_k'\right)^*} \frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle}.$$

Toujours comme précédemment, on a $\dim\left(q\left(F'_k\right)\right) = \operatorname{Card}\left(q\left(e'_k\right), \ldots, q\left(e'_{d-1}\right)\right) = d-1-k+1 = d-k$. Donc $q\left(F'_k\right) \in \mathcal{V}_{d-k} = \mathcal{V}_{d-(k+1)+1}$. D'où

$$\lambda'_k \leqslant \min_{V \in \mathcal{V}_{d-(k+1)+1}} \max_{z \in V^*} \frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle}.$$

Finalement par la question 4.d

$$\boxed{\lambda'_k \leqslant \lambda_{k+1}\,.}$$