Banque PT - Maths A - 2022
Version pour juniors

Les parties en bleu ont été ajoutées ou modifiées par rapport sujet initial.

Le sujet est composé de 3 parties.

Les parties 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

Première Partie

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

1. Calculer pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$.
2. Déterminer les trois racines $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ de P.

On dit qu'une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. On admet alors la propriété suivante :

$$P \text{ est orthogonale} \qquad \Leftrightarrow \qquad PP^T = I_n.$$

3. Déterminer une matrice orthogonale P telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Les coefficients de la première ligne de P seront tous positifs.
4. Démontrer que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire A^n en fonction de n pour tout entier naturel n.
6. Soient A', D' et P' trois matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que D' est diagonale, P' est orthogonale et $A' = P'D'P'^{-1}$.
   La matrice A' est-elle symétrique ?

Deuxième Partie

Dans cette partie, on confond une matrice à une ligne et une colonne avec son unique coefficient.
Pour toute matrice M on note M^T sa transposée.
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et de sa base canonique $\mathcal{B} = (i, j, k)$. On note $\langle , \rangle$ le produit scalaire usuel.
La matrice A est celle qui a été définie dans la première partie et on note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.
Pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$, on note $\varphi(u, v) = U^T AV$ où U et V sont les matrices colonnes des coordonnées de u et v dans la base $\mathcal{B}$.

1. Pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est U, on considère la matrice colonne $U' = P^T U = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ où P est la matrice déterminée dans la première partie.

(a) Démontrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.

(b) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Que représente U' pour le vecteur u ? On sera le plus précis possible.

(c) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Exprimer $\varphi(u, u)$ en fonction de D et U' puis de x', y' et z'.

(d) En déduire que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

2. (a) Soient λ et μ deux réels distincts et u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = \lambda u$ et $f(v) = \mu v$. Montrer que u et v sont orthogonaux pour le produit scalaire φ.

   (b) En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire φ.

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On note F_u son orthogonal pour le produit scalaire $\langle , \rangle$ et F'_u celui pour le produit scalaire φ :

$$F_u = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u, v \rangle = 0 \right\} \qquad F'_u = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(u, v) = 0 \right\}.$$

3. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(u) = \lambda u$. Montrer que $F_u = F'_u$.

4. (a) Donner une base de F_i où i est le premier vecteur de la base canonique.

   (b) Déterminer une base de F'_i.

   (c) A-t-on $F_i = F'_i$? Déterminer une base de $F_i \cap F'_i$.

5. (a) Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que si $v \in F'_u$ alors $f(v) \in F_u$.

   (b) Démontrer que pour tous vecteurs v et w de $\mathbb{R}^3$, $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$.

6. Soit u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $F_u = F'_u$.

   (a) Démontrer à l'aide de la question 5. que $f(F_u) = F_u$.

   (b) En déduire que $f(u)$ est orthogonal à F_u pour le produit scalaire $\langle , \rangle$ puis qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$.
   *On pourra admette que l'on peut compléter u en une base **orthogonale**.*

Troisième Partie : Jouons au golf.

1. Dans l'un de ses sacs de golf, Anna a rangé trois clubs de golf dont un putter. Elle tire au hasard et sans remise un club de golf de son sac jusqu'à ce qu'elle obtienne son putter.

   On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage où le putter a été tiré et pour i entier supérieur ou égal à 1, on note C_i l'évènement « Le putter a été tiré lors du i-ième tirage ».

   (a) Déterminer et reconnaître la loi de X.

   (b) En déduire l'espérance et la variance de X.

2. Pour jouer, Anna a également à sa disposition un sceau de balles de golf contenant 44 balles blanches et 4 balles jaunes.

   Au début de chaque trou, Anna tire au hasard une balle dans le sceau, note sa couleur, joue le trou puis la remet dans le sceau.

   Un parcours de golf comprend 18 trous.

   Soit J la variable aléatoire égale au nombre de balles jaunes utilisées lors de <u>deux</u> parcours.

   (a) Reconnaitre la loi de J. Une réponse argumentée est attendue.
   Préciser $J(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par J ainsi que la probabilité $P(J = k)$ pour tout k de $J(\Omega)$.

   (b) En moyenne, combien de balles jaunes, Anna a-t-elle joué lors des deux parcours ?

3. Soit J' une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ :

$$J'(\Omega) = \mathbb{N}, \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ P\left(J' = k\right) = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Justifier que J' admet une espérance i.e. que $\sum_{k\in\mathbb{N}} kP\left(J' = k\right)$ converge et la calculer.

(a) Pour quelle valeur de λ, les variables aléatoires J et J' ont-elles la même espérance ?

(b) Donner la valeur de $P(J' = 9)$ et celle de $P(J' \geqslant 1)$ sans signe $\sum$.

On appelle fonction de répartition de J', la fonction définie sur $\mathbb{N}$, par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad F(k) = \mathbb{P}\left(J' \leqslant k\right).$$

On admet que pour la valeur de λ précédente, $P(J' = k)$ est une valeur approchée de $P(J = k)$ et on donne pour certaines valeurs de k, le tableau de la fonction de répartition F de la variable aléatoire J'.

k	0	1	2	3	4	5	6
$F(k)$	0.0498	0.1991	0.4232	0.6472	0.8153	0.9161	0.9665

k	7	8	9	10	11	12	13
$F(k)$	0.9881	0.9962	0.9989	0.9997	0.9999	1	1

4. Donner alors une valeur approchée des probabilités des évènements suivants :

- « Anna a tiré au plus 3 balles jaunes »
- « Anna a tiré 7 balles jaunes »
- « Anna a tiré au moins 10 balles jaunes »

5. Un autre joueur, Anthony, s'entraîne sur le premier trou du parcours. Il réussit le par sur ce trou s'il rentre la balle dans le trou en exactement 4 coups. Il est au-dessous du par s'il rentre la balle dans le trou en 3 coups maximum et il est au-dessus du par dans les autres cas.

Anthony a constaté que : pour tout entier naturel n,

- si lors du n-ième entraînement, il est au-dessous du par, alors lors de l'entraînement suivant, il reste au-dessous du par avec une probabilité de $\frac{5}{8}$, il réussit le par avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ et il est au-dessus du par avec une probabilité de $\frac{1}{8}$.
- si lors du n-ième entraînement, il réussit le par, alors lors de l'entraînement suivant, il est au-dessous du par avec une probabilité de $\frac{1}{4}$, il réussit le par avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et il est au-dessus du par avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.
- si lors du n-ième entraînement, il est au-dessus du par, alors lors de l'entraînement suivant, il est au-dessous du par avec une probabilité de $\frac{1}{8}$, il réussit le par avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ et il reste au-dessus du par avec une probabilité de $\frac{5}{8}$.

On note A_n, B_n et C_n les évènements « Anthony est au-dessous du par lors du n-ième entraînement », « Anthony réussit le par lors du n-ième entraînement » et « Anthony est au-dessus du par lors du n-ième entraînement » et a_n, b_n et c_n leur probabilité respective.

Lors du dernier échauffement, considéré comme l'entraînement numéro 0, Anthony réussit le par. On a donc $a_0 = c_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

(a) Donner les valeurs de a_1, b_1 et c_1.

(b) Donner les valeurs des probabilités conditionnelles : $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{C_n}(A_{n+1})$. Chaque valeur devra être justifiée par une phrase, éventuellement extraite de l'énoncé.

(c) Etablir pour tout entier naturel n que $a_{n+1} = \frac{5}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{8}c_n$.

(d) Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Aucune justification n'est demandée.

Pour tout entier naturel n, on pose $G_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

(a) Donner une relation entre G_{n+1}, G_n et la matrice A de la première partie.

(b) Ecrire des commandes PYTHON permettant de calculer et d'afficher la probabilité qu'Anthony réussisse le par lors du 20-ième entraînement. On supposera, si nécessaire, le module NUMPY chargé par la commande :

```
from numpy import *
```

(c) Donner sans démonstration la relation entre G_n, G_0, A et n.

(d) En déduire les valeurs de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

(e) Que valent $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$? Interpréter le résultat.

5. Un autre jour, Anthony s'entraîne à sortir une balle du bunker (zone remplie de sable). La probabilité qu'il arrive à sortir la balle du premier coup est $p_1 = \frac{1}{2}$. Puis à cause de la fatigue, la probabilité qu'il arrive à sortir la balle du bunker à la n-ième tentative ($n \geqslant 2$), sachant qu'il a échoué aux précédentes est $p_n = \frac{1}{n+1}$. Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k l'évènement : « la balle sort du bunker à la k-ième tentative » et on considère la variable aléatoire T égale au numéro de la tentative où la balle sort du bunker et on convient que T prend la valeur 0 lorsque l'évènement « la balle ne sort jamais du bunker » est réalisé.

(a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{0; -1\}$,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

(b) Soit n un entier naturel non nul. Exprimer l'évènement $(T = n)$ à l'aide des évènements S_k pour des valeurs de k bien choisies.

(c) En déduire $P(T = n)$ pour tout $n \geqslant 2$.
Cette formule est-elle valable aussi pour $n = 1$?

(d) Chaque tentative pour sortir la balle du bunker prend 3 minutes. Quelle est la probabilité qu'Anthony arrive à sortir la balle du bunker en une heure ou moins ?

(e) Calculer $P(T = 0)$.

(f) i. Ecrire la série génératrice G_T de T. Déterminer soigneusement pour quelles valeurs de t $G_T(t)$ converge.

ii. Exprimer G_T à l'aide de fonctions usuelles.

On admettra que pour tout $t \in]-1;1]$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k} = \ln(1+t)$.

(g) La variable aléatoire T admet-elle une espérance ?