Corrigé - Banque PT - Maths A - 2022
Version pour juniors

Les réponses en bleu sont les réponses des questions ajoutées ou modifiées par rapport sujet initial.

Le sujet est composé de 3 parties.

Les parties 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

Première Partie

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) \\
&= \begin{vmatrix} \frac{5}{2}-\lambda & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2+\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2}-\lambda \end{vmatrix} && L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\
&= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} && C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \\
&= +(2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} && \text{en développant par rapport à } L_1 \\
&= (2-\lambda)\left((2-\lambda)(3-\lambda) - 2\right) \\
&= (2-\lambda)\left(6 - 5\lambda + \lambda^2 - 2\right) \\
&= -(\lambda - 2)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 4\right).
\end{aligned}$$

On remarque que 1 est une racine de $\lambda^2 - 5\lambda + 4$. Conclusion, en factorisant,

$$\boxed{P(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-4).}$$

2. Par la question précédente, les trois racines distinctes de P sont directement données par

$$\boxed{\lambda_1 = 1 < \lambda_2 = 2 < \lambda_3 = 4.}$$

Vous apprendrez l'année prochaine que la somme des λ i.e. des valeurs propres (comptées avec multiplicité) est égale à la trace. Vérifions ici : $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1+2+4 = 7$ et $Tr(A) = \frac{5}{2}+2+\frac{5}{2} = 5+2 = 7$ OK !

3. On cherche donc à diagonaliser A ou encore on cherche une nouvelle base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle l'application f canoniquement associée à A dans $\mathbb{R}^3$ est donnée par $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   Donc on cherche $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^3$ base de $\mathbb{R}^3$ telle que, notamment, $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = 2e_2$, $f(e_3) = 4e_3$.

   Commençons par e_1. Soit $X = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$f(X) = X \quad \Leftrightarrow \quad f(X) - X = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \Leftrightarrow \quad AX - X = 0_{\mathbb{R}^3}$$

   car f est canoniquement associée à A dans $\mathbb{R}^3$. Donc

$$\begin{aligned}
f(X) = X \quad &\Leftrightarrow \quad (A - I_3)\, X = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{3}{2}a + b + \frac{c}{2} = 0 \\ a + b + c = 0 \\ \frac{a}{2} + b + \frac{3c}{2} = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a + 2b + 3c = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ a + 2b + 3c = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + b + c = 0 \\ -b - 2c = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b = -2c \end{cases} \qquad \text{car } L_2 = -L_3 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -b - c = 2c - c = c \\ b = -2c. \end{cases}
\end{aligned}$$

   Par exemple on prend $e_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   Vérification : $Ae_1' = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 - 2 + 1/2 \\ 1 - 4 + 1 \\ 1/2 - 2 + 5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = e_1'$ *OK !*

   De la même façon, pour $X \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
f(X) = 2X \quad &\Leftrightarrow \quad (A - 2I_3)\, X = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} X = 0_{\mathbb{R}^3}.
\end{aligned}$$

On observe que $e_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ est une solution. Enfin, toujours pour $X \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f(X) = 4X \quad & \Leftrightarrow \quad (A - 4I_3) X = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} X = 0_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

Cette fois, on observe que $e_3' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est une solution.

Il nous faut P orthogonale avec les coefficients de la première ligne positifs i.e. $\mathscr{B}$ orthonormée avec les premiers coefficients positifs. Normalisons e_1', e_2', e_3' :

$$e_1 = \frac{e_1'}{\|e_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4+1}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Posons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Puisque e_1' vérifie $f(e_1') = e_1'$ par linéarité de f,

$$f(e_1) = f\left(\frac{e_1'}{\|e_1'\|}\right) = \frac{1}{\|e_1'\|} f(e_1') = \frac{1}{\|e_1'\|} e_1' = e_1.$$

De même $f(e_2) = 2e_2$ et $f(e_3) = 4e_3$. Par construction, $\mathscr{B}$ est normée. Montrons qu'elle est orthogonale :

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}} (1 - 1) = 0.$$

De même

$$\langle e_1, e_3 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0, \qquad \langle e_2, e_3 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0.$$

Donc $\mathscr{B}$ est une famille orthonormée. L'année prochaine vous verrez qu'une famille orthogonale de vecteurs non nuls est toujours libre. Montrons-le ici. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{6}} + \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{3}} = 0 \\ -2\frac{a}{\sqrt{6}} + \frac{c}{\sqrt{3}} = 0 \\ \frac{a}{\sqrt{6}} - \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{3}} = 0 \end{cases} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + \sqrt{3}b + \sqrt{2}c = 0 \\ -2a + \sqrt{2}c = 0 \\ a - \sqrt{3}b + \sqrt{2}c = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow \sqrt{6}L_1 \\ L_2 \leftarrow \sqrt{6}L_2 \\ L_3 \leftarrow \sqrt{6}L_3 \end{matrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + \sqrt{3}b + \sqrt{2}c = 0 \\ 2\sqrt{3}b + 3\sqrt{2}c = 0 \\ -2\sqrt{3}b = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\ & \Leftrightarrow \quad a = b = c = 0. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre. Or $\operatorname{Card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Notons $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $P = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$. Puisque $\mathscr{B}$ est une base, P est inversible et puisque $\mathscr{B}$ est une base orthonormée, P est orthogonale et donc $P^{-1} = P^T$. Puisque $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_2$ et $f(e_3) = e_3$, on en déduit que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = D$. Donc par la formule de changement de base,

$$\boxed{A = PDP^{-1}, \qquad \text{avec } P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ orthogonale.}}$$

NB : nous avons eu directement des coefficients positifs en première ligne, inutile d'adapter la matrice P.

4. Puisque la question contient un « démontrer », faisons la récurrence. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».

   Initialisation. Si $n = 0$, alors $A^0 = I_3$ par convention et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} = AA^n &= APD^nP^{-1} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= PDP^{-1}PD^nP^{-1} && \text{par la question précédente} \\ &= PDD^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{A^n = PD^nP^{-1}.}$$

5. Par récurrence, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

   Donc par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= PD^nP^T && \text{car } P \text{ est orthogonale} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^T \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2^n/\sqrt{2} & 4^n/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 4^n/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -2^n/\sqrt{2} & 4^n/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} + 2^{n-1} + \frac{4^n}{3} & \frac{4^n-1}{3} & \frac{1}{6} - 2^{n-1} + \frac{4^n}{3} \\ \frac{4^n-1}{3} & \frac{4^n+2}{3} & \frac{4^n-1}{3} \\ \frac{1}{6} - 2^{n-1} + \frac{4^n}{3} & \frac{4^n-1}{3} & \frac{1}{6} + 2^{n-1} + \frac{4^n}{3} \end{pmatrix}.}$$

6. Soient A', D' et P' trois matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que D' est diagonale, P' est orthogonale et $A' = P'D'P'^{-1}$.

Montrons que A' est symétrique. Puisque D' est diagonale, elle est notamment symétrique donc $(D')^T = D'$. Par suite,

$$(A')^T = \left(P'D'P'^{-1}\right)^T = \left(P'^{-1}\right)^T (D')^T (P')^T = \left(P'^{-1}\right)^T D' (P')^T.$$

Or P' est orthogonale. Donc

$$(A')^T = \left(P'^T\right)^T D'P'^{-1} = P'D'P'^{-1} = A'.$$

Conclusion,

$$\boxed{A' \text{ est symétrique.}}$$

Deuxième Partie

1. Pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est U, on considère la matrice colonne $U' = P^T U = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ où P est la matrice déterminée dans la première partie.

   (a) Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

   - Avec les notations de l'énoncé, on a $U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $U^T \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$, $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $V \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Le produit $U^T AV$ est donc compatible (existe) et appartient à $\mathbb{R}$. Donc φ est une application bien définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ce qui justifie le terme « forme ».
   - Soient u' un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. La représentation matricielle de $\lambda u + \mu u'$ étant $\lambda U + \mu U'$, on a

   $$\begin{aligned}
   \varphi(\lambda u + \mu u', v) &= (\lambda U + \mu U')^T AV \\
   &= \left(\lambda U^T + \mu U'^T\right) AV && \text{par linéarité de la transposée} \\
   &= \lambda U^T AV + \mu U'^T AV && \text{par linéarité de la multiplication matricielle} \\
   &= \lambda \varphi(u, v) + \mu \varphi(u', v).
   \end{aligned}$$

   Donc φ est linéaire à gauche.
   - De plus,

   $$\varphi(v, u) = V^T AU.$$

   Or, on a déjà vu que $V^T AU \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $V^T AU = \left(V^T AU\right)^T$. Ainsi,

   $$\varphi(v, u) = \left(V^T AU\right)^T = U^T A^T \left(V^T\right)^T = U^T AV,$$

   car A est symétrique. Donc $\varphi(v, u) = \varphi(u, v)$ et φ est symétrique.
   - Par symétrie et linéarité à gauche, φ est aussi linéaire à droite et donc bilinéaire.

   Conclusion,

   $$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est une forme bilinéaire symétrique.}}$$

   (b) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On sait que U est la représentation matricielle de u et que $U' = P^T U = P^{-1}U$. La matrice P est la matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}$. D'après le cours, on en déduit que

   $$\boxed{U' \text{ est la représentation matricielle de } u \text{ dans la base } \mathscr{B} \text{ de la première partie.}}$$

(c) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\varphi(u,u) = U^T AU = \left(PU'\right)^T APU' = \left(U'\right)^T P^T APU' = U'^T DU'.$$

Puis,

$$\varphi(u,u) = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \left(x'\right)^2 + 2\left(y'\right)^2 + 4\left(z'\right)^2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi(u,u) = U'^T DU' = \left(x'\right)^2 + 2\left(y'\right)^2 + 4\left(z'\right)^2.}$$

(d) On a déjà vu que φ est une forme bilinéaire symétrique. Il nous reste donc à montrer qu'elle est définie et positive.

- *(Positivité).* Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Par la question précédente, on observe que, par somme de termes positifs,
$$\varphi(u,u) = \left(x'\right)^2 + 2\left(y'\right)^2 + 4\left(z'\right)^2 \geqslant 0.$$
- *(Définie).* Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Supposons que $\varphi(u,u) = 0_{\mathbb{R}}$. Alors,
$$\left(x'\right)^2 + 2\left(y'\right)^2 + 4\left(z'\right)^2 = 0.$$
Puisque les termes sont positifs,
$$\left(x'\right)^2 = 2\left(y'\right)^2 = 4\left(z'\right)^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x' = y' = z' = 0_{\mathbb{R}}.$$
Donc $U' = 0_{\mathbb{R}^3}$ et donc $U = PU' = 0_{\mathbb{R}^3}$. Donc u est le vecteur nul.

Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}^3.}$$

2. (a) Soient λ et μ deux réels distincts et u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = \lambda u$ et $f(v) = \mu v$.
On a matriciellement, $AU = \lambda U$ et $AV = \mu V$. Donc d'une part,

$$\varphi(u,v) = U^T AV = U^T(\mu V) = \mu U^T V.$$

D'autre part, comme A est symétrique,

$$\varphi(u,v) = U^T AV = (AU)^T V = (\lambda U)^T V = \lambda U^T V.$$

Donc

$$(\lambda - \mu) U^T V = 0_{\mathbb{R}}.$$

Or par hypothèse, $\lambda \neq \mu$ donc $U^T V = 0$ et donc $\varphi(u,v) = \mu U^T V = 0_{\mathbb{R}}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Les vecteurs } u \text{ et } v \text{ sont orthogonaux pour le produit scalaire } \varphi.}$$

(b) Montrons que $\tilde{\mathscr{B}} = (\tilde{e_1}, \tilde{e_2}, \tilde{e_3}) = \left(e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{2}e_3\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, où e_1, e_2 et e_3 sont définis à la question 3., est orthonormée pour φ.

- On a déjà vu que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on montre qu'il en va de même pour $\tilde{\mathscr{B}}$.
- Puisque $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = 2e_2$ et $f(e_3) = 4e_3$, on a $f(\tilde{e_1}) = \tilde{e_1}$, $f(\tilde{e_2}) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}f(e_2) = \frac{2}{\sqrt{2}}e_2 = 2\tilde{e_2}$ et $f(\tilde{e_3}) = 4\tilde{e_4}$. On en déduit de la question précédente que $\tilde{\mathscr{B}}$ est orthogonale.

- Enfin, comme $f(\tilde{e_1}) = \tilde{e_1}$, en notant $\tilde{E_1}$ le vecteur colonne des coordonnées de $\tilde{e_1}$ dans la base canonique, on a $A\tilde{E_1} = \tilde{E_1}$. Donc

$$\varphi(\tilde{e_1}, \tilde{e_1}) = \tilde{E_1}^T A\tilde{E_1} = \tilde{E_1}^T \tilde{E_1} = \langle \tilde{e_1}, \tilde{e_1} \rangle = \|\tilde{e_1}\|^2 = \|e_1\|^2 = 1.$$

De même,

$$\varphi(\tilde{e_2}, \tilde{e_2}) = 2\tilde{E_2}^T \tilde{E_2} = 2\|\tilde{e_2}\|^2 = 2\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}e_2\right\|^2 = \|e_2\|^2 = 1.$$

Et enfin, $\varphi(\tilde{e_3}, \tilde{e_3}) = 1$.

Conclusion,

$$\boxed{\tilde{\mathscr{B}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) \text{ est orthonormée pour } \varphi.}$$

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On note F_u son orthogonal pour le produit scalaire $\langle , \rangle$ et F'_u celui pour le produit scalaire φ :

$$F_u = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u, v \rangle = 0 \right\} \qquad F'_u = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(u, v) = 0 \right\}.$$

3. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(u) = \lambda u$. Soit $v \in \mathbb{R}^3$. Comme vu précédemment, on observe que

$$\varphi(u, v) = U^T AV = (AU)^T V = (\lambda U)^T V = \lambda U^T V.$$

Dès lors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} v \in F_u \quad \Leftrightarrow \quad \langle u, v \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad U^T V = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda U^T V = 0 \qquad \text{CAR } \lambda \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi(u, v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad v \in F'_u. \end{aligned}$$

Par ces équivalences, on en déduit que

$$\boxed{F_u = F'_u.}$$

4. (a) Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $V = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique. On a

$$\langle i, v \rangle = I^T V = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = x.$$

Par conséquent, en notant j et k les deux autres vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$v \in F_i \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V = \begin{bmatrix}0\\y\\z\end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad v = yj + zk.$$

Donc

$$F_i = \text{Vect}(j, k).$$

La famille (j, k) engendre donc F_i et est libre en tant que sous famille de la base canonique. Conclusion,

$$\boxed{(j, k) \text{ est une base de } F_i.}$$

(b) Avec les notations de la question précédente,

$$\varphi(i,v) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 2 & 1\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \frac{5x+2y+z}{2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} v \in F_i' \quad &\Leftrightarrow \quad 5x+2y+z=0 \quad &&\Leftrightarrow \quad z=-5x-2y\\ & &&\Leftrightarrow \quad v = xi+yj-(5x+2y)\,k\\ & && \qquad = x\,(i-5k)+y\,(j-2k)\,. \end{aligned}$$

Et donc,

$$F_i' = \operatorname{Vect}(i-5k, j-2k)\,.$$

La famille $(i-5k, j-2k)$ engendre F_i' et est libre (car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires). Conclusion,

$$\boxed{(i-5k, j-2k) \text{ est une base de } F_i'.}$$

(c) Par ce qui précède, avec les mêmes notations,

$$v \in F_i \cap F_i' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=0\\ 5x+2y+z=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=0\\ z=-2y \end{cases}.$$

Conclusion,

$$\boxed{(j-2k) \text{ est une base de } F_i \cap F_i'.}$$

Notamment, $\dim(F_i \cap F_i') = \operatorname{Card}(j-2k) = 1 \neq 2 = \operatorname{Card}(j,k) = \dim(F_i)$. Donc $F_i \cap F_i' \neq F_i$ et nécessairement,

$$\boxed{F_i \neq F_i'.}$$

5. (a) Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Supposons $v \in F_u'$. Alors, puisque AV est la représentation matricielle de $f(v)$,

$$0 = \varphi(u,v) = U^T AV = \langle u, f(v)\rangle\,.$$

Donc $f(v) \in F_u$. Conclusion,

$$\boxed{v \in F_u' \qquad \Rightarrow \qquad f(v) \in F_u.}$$

(b) Soient v et w deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Par ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} \langle f(v), w\rangle = (AV)^T W = V^T A^T W &= V^T AW \qquad \text{car } A \text{ est symétrique}\\ &= \langle v, f(w)\rangle\,. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall (v,w) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2, \qquad \langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle\,.}$$

6. Soit u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $F_u = F_u'$.

(a) Soit $v \in f(F_u)$. Alors il existe $w \in F_u$ tel que $v = f(w)$. On a $w \in F_u = F_u'$ donc par la question précédente, $f(w) \in F_u$. Donc $v = f(w) \in F_u$. Ceci étant vrai pour tout $v \in f(F_u)$, on en déduit que

$$f(F_u) \subseteq F_u.$$

D'autre part, on peut noter que A est inversible. En effet, D est inversible (et son inverse est $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$) donc par produit de matrice A est inversible (et $A^{-1} = PD^{-1}P^T$). Donc f est bijective. Soit $\mathscr{B}_u$ une base de F_u (existe car F_u sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension finie). Alors, puisque f est injective et $\mathscr{B}_u$ libre, $f(\mathscr{B}_u)$ est libre. De plus, puisque $\mathscr{B}_u$ est génératrice de F_u, $f(\mathscr{B}_u)$ engendre $f(F_u)$. Donc $f(\mathscr{B}_u)$ est une base de $f(F_u)$. D'où

$$\dim(f(F_u)) = \mathrm{Card}(f(\mathscr{B}_u)) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_u) = \dim(F_u).$$

Ainsi, puisque $f(F_u) \subseteq F_u$ et que $\dim(f(F_u)) = \dim(F_u)$, on conclut que

$$\boxed{f(F_u) = F_u.}$$

(b) Montrons que $f(u)$ est orthogonal à F_u i.e.

$$\forall v \in F_u, \qquad \langle f(u), v\rangle = 0.$$

Soit $v \in F_u$. Par la question précédente, $f(v) \in f(F_u) = F_u$. Donc

$$\langle u, f(v)\rangle = 0.$$

Alors, par la question 5.b

$$0 = \langle u, f(v)\rangle = \langle f(u), v\rangle.$$

Ceci étant vrai pour tout $v \in F_u$, on conclut que

$$\boxed{f(u) \in F_u^{\perp} \text{ i.e. } f(u) \text{ est orthogonal à } F_u \text{ pour le produit scalaire } \langle,\rangle.}$$

Soit v un vecteur non nul orthogonal à u et $w = u \wedge v$. Alors $\mathscr{B}_u = (u, v, w)$ est une famille de vecteurs orthogonaux non nuls et donc libre et de cardinal 3 donc forme une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. Donc il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$f(u) = \lambda u + \mu v + \nu w.$$

Puisque v et w sont orthogonaux à F_u, par définition, $v \in F_u$ et $w \in F_u$. Or $f(u) \in F_u^{\perp}$. Donc $f(u)$ est orthogonal à v et w :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \langle f(u), v\rangle = 0 \\ \langle f(u), w\rangle = 0 \end{cases} \quad & \Rightarrow \quad \begin{cases} \langle \lambda u + \mu v + \nu w, v\rangle = 0 \\ \langle \lambda u + \mu v + \nu w, w\rangle = 0 \end{cases} \\
& \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda \langle u, v\rangle + \mu \langle v, v\rangle + \nu \langle w, v\rangle = 0 \\ \lambda \langle u, w\rangle + \mu \langle v, w\rangle + \nu \langle w, w\rangle = 0 \end{cases} \quad \text{par linéarité à gauche} \\
& \Rightarrow \quad \begin{cases} \mu \|v\| = 0 \\ \nu \|w\| = 0 \end{cases} \\
& \Rightarrow \quad \mu = \nu = 0 \qquad \text{car } v \text{ et } w \text{ sont des vecteurs non nuls} \\
& \Rightarrow \quad f(u) = \lambda u + 0_{\mathbb{R}^3}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R}, \qquad f(u) = \lambda u.}$$

Troisième Partie : Jouons au golf.

1. Dans l'un de ses sacs de golf, Anna a rangé trois clubs de golf dont un putter. Elle tire au hasard et sans remise un club de golf de son sac jusqu'à ce qu'elle obtienne son putter.

   On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage où le putter a été tiré et pour i entier supérieur ou égal à 1, on note C_i l'évènement « Le putter a été tiré lors du i-ième tirage ».

   (a) L'expérience revient à tirer avec ordre les trois clubs de golf et de noter la position du putter parmi ces trois tirages. Le putter a autant de chance d'être à la première ou deuxième ou troisième place. Par conséquent, X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$:

   $$\boxed{X \sim \mathscr{U}\left(\llbracket 1;3 \rrbracket\right).}$$

   (b) Par le cours (on peut retrouver rapidement le résultat au brouillon si besoin), on en déduit que

   $$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} = 2, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{4 \times 2}{12} = \frac{2}{3}.}$$

2. Pour jouer, Anna a également a sa disposition un sceau de balles de golf contenant 44 balles blanches et 4 balles jaunes.

   Au début de chaque trou, Anna tire au hasard une balle dans le sceau, note sa couleur, joue le trou puis la remet dans le sceau.

   Un parcours de golf comprend 18 trous.

   Soit J la variable aléatoire égale au nombre de balles jaunes utilisées lors de <u>deux</u> parcours.

   (a) Pour chaque trou, la variable retournant 1 si la balle est jaune et 0 sinon suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{4}{44+4} = \frac{1}{11+1} = \frac{1}{12}$. Pour construire J il suffit de sommer ces 18×2 variables de Bernoulli qui sont, puisque les tirages sont avec remise,

   - de loi de Bernoulli,
   - de même paramètre $p = \frac{1}{12}$,
   - indépendantes.

   Conclusion, J suit une loi binomiale de paramètre $n = 36$ et $p = \frac{1}{12}$:

   $$\boxed{J \sim \mathscr{B}\left(36, \frac{1}{12}\right).}$$

   En particulier, en notant Ω l'univers probabilisé sur lequel est défini J,

   $$\boxed{J(\Omega) = \llbracket 0;36 \rrbracket \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \llbracket 0;36 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(J = k) = \binom{36}{k} \frac{1}{12^k} \left(\frac{11}{12}\right)^{n-k} = \binom{36}{k} \frac{11^{n-k}}{12^n}.}$$

   (b) Par le cours, $\mathbb{E}(J) = np$. Donc ici,

   $$\mathbb{E}(J) = 36 \times \frac{1}{12} = 3.$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\text{Anna a joué en moyenne 3 balles jaunes lors de deux parcours.}}$$

3. Soit J' une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ :
$$J'(\Omega) = \mathbb{N}, \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ P\left(J' = k\right) = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}.$$
Pour tout $k \geqslant 3$,
$$k^2 \times kP\left(J' = k\right) = k^3 \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda^3\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{k^2}{(k-1)(k-2)}\,\frac{\lambda^{k-3}}{(k-3)!}.$$
Or par croissance comparée, $\frac{\lambda^p}{p!} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par produit,
$$\lim_{k\to+\infty} k^2 \times kP\left(J' = k\right) = 0.$$
Donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $k \geqslant k_0$,
$$0 \leqslant k^2 \times kP\left(J' = k\right) \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant kP\left(J' = k\right) \leqslant \frac{1}{k^2} \qquad \text{car } k > 0.$$
Or $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs,
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} kP\left(J' = k\right) \ \text{converge.}$$
De plus, pour tout $n \geqslant 1$,
$$\sum_{k=0}^{n} kP\left(J' = k\right) = \sum_{k=1}^{n} kP\left(J' = k\right) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$
Posons $\tilde{k} = k-1$,
$$\sum_{k=0}^{n} kP\left(J' = k\right) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{(k)!}.$$
On reconnait alors une série exponentielle de paramètre $z = \lambda$ *(on aurait aussi pu utiliser cet argument pour montrer la convergence)*. On en déduit que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} kP\left(J' = k\right) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}\times\mathrm{e}^{\lambda} = \lambda.$$
Conclusion,
$$\boxed{J' \text{ admet une espérance et celle-ci vaut } \mathbb{E}\left(J'\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP\left(J' = k\right) = \lambda.}$$

(a) Par ce qui précède, on a directement,
$$\boxed{\mathbb{E}(J) = \mathbb{E}\left(J'\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad 3 = \lambda.}$$

(b) Pour $k = 9$, on a directement *(forcément avec l'aide en bleu, c'est plus facile)*,
$$\boxed{P\left(J' = 9\right) = \frac{\lambda^9}{9!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}.}$$
Et,
$$\boxed{P\left(J' \geqslant 1\right) = 1 - P\left(J' = 0\right) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}.}$$

On appelle fonction de répartition de J', la fonction définie sur $\mathbb{N}$, par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad F(k) = \mathbb{P}\left(J' \leqslant k\right).$$

On admet que pour la valeur de λ précédente, $P\left(J' = k\right)$ est une valeur approchée de $P\left(J = k\right)$ et on donne pour certaines valeurs de k, le tableau de la fonction de répartition F de la variable aléatoire J'.

k	0	1	2	3	4	5	6
$F(k)$	0.0498	0.1991	0.4232	0.6472	0.8153	0.9161	0.9665

k	7	8	9	10	11	12	13
$F(k)$	0.9881	0.9962	0.9989	0.9997	0.9999	1	1

4. - Notons A_1 l'évènement « Anna a tiré au plus 3 balles jaunes ». On a *(cela fait vraiment bizarre d'écrire $\approx$ dans une copie de maths, j'ai encore du mal à m'en remettre...)*

   $$P\left(A_1\right) = P\left(J \leqslant 3\right) \approx P\left(J' \leqslant 3\right) = F(3).$$

   Donc d'après le tableau ci-dessus,

   $$\boxed{P\left(A_1\right) \approx 0.6472}$$

   - Posons A_2 : « Anna a tiré 7 balles jaunes ». On a

   $$\begin{aligned} P\left(A_2\right) = P\left(J = 7\right) \approx P\left(J' = 7\right) = P\left(J' \leqslant 7\right) - P\left(J' \leqslant 6\right) &= F(7) - F(6) \\ &= 0.9881 - 0.9665 \\ &= 0.0216. \end{aligned}$$

   D'où,

   $$\boxed{P\left(A_2\right) \approx 0.0216}$$

   - Posons A_3 : « Anna a tiré au moins 10 balles jaunes ». On a

   $$P\left(A_3\right) = P\left(J \geqslant 10\right) \approx P\left(J' \geqslant 10\right) = 1 - P\left(J' \leqslant 9\right) = 1 - F(9) = 1 - 0.9989 = 0.0011.$$

   D'où,

   $$\boxed{P\left(A_2\right) \approx 0.0011}$$

5. Oh chic chic chic ! Une chaîne de Markov !

   (a) A l'entraînement 0 Anthony réussit le par. Donc par l'énoncé,

   $$\boxed{a_1 = P\left(A_1\right) = \frac{1}{4}, \qquad b_1 = P\left(B_1\right) = \frac{1}{2}, \qquad c_1 = P\left(C_1\right) = \frac{1}{4}.}$$

   (b) S'il est au-dessous du par à l'entraînement n, alors il reste au-dessous avec une probabilité $\frac{5}{8}$, donc $P_{A_n}\left(A_{n+1}\right) = \frac{5}{8}$.
   S'il réussit le par à l'entraînement n, alors il est au-dessous avec une probabilité $\frac{1}{4}$, autrement dit $P_{B_n}\left(A_{n+1}\right) = \frac{1}{4}$.
   Enfin, s'il est au-dessus du par à l'entraînement n, alors il est au-dessous avec une probabilité $\frac{1}{8}$, donc $P_{C_n}\left(A_{n+1}\right) = \frac{1}{8}$ Conclusion,

   $$\boxed{P_{A_n}\left(A_{n+1}\right) = \frac{5}{8}, \qquad P_{B_n}\left(A_{n+1}\right) = \frac{1}{4}, \qquad P_{C_n}\left(A_{n+1}\right) = \frac{1}{8}.}$$

(c) *Le grand classique, on l'avait vu venir !* Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille (A_n, B_n, C_n) forme un système complet d'évènements incompatibles. Donc par la formule des probabilités totales,

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1}) P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1}) P(C_n).$$

Par la question précédente, on en déduit bien que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \frac{5}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{8}c_n.}$$

(d) De même,

$$\boxed{\begin{cases} b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{5}{8}c_n. \end{cases}}$$

Pour tout entier naturel n, on pose $G_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

(a) Par les relations précédentes, on observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$G_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} G_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad G_{n+1} = \frac{1}{4}AG_n.}$$

(b) Initialement, on a $G_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Une petite boucle FOR suffit :

```python
M = [[5/8, 1/4, 1/8], [1/4, 1/2, 1/4], [1/8, 1/4, 5/8]]
G = [0, 1, 0]
for _ in range(20):
    G = dot(M, G)                                    # pour numpy, matrice fois ligne = ligne
print(G[1])
```

(c) On a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad G_n = \frac{1}{4^n}A^nG_0.}$$

(d) A l'aide de la question précédente et de la question 5.

$$G_n = \frac{1}{4^n}\begin{bmatrix} \frac{4^n-1}{3} \\ \frac{4^n+2}{3} \\ \frac{4^n-1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{4^n} \\ 1 + \frac{2}{4^n} \\ 1 - \frac{1}{4^n} \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = c_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \text{ et } b_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right).}$$

(e) De la question précédente, on en déduit que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}.}$$

On observe ici ce que l'on appelle la convergence de la chaîne de Markov vers la mesure invariante.

On en déduit qu'en temps long (mais pas si long car la convergence est géométrique/exponentielle) Anthony aura autant de chance d'être au-dessous du par, qu'en-dessous ou qu'être au par.

Comme le dit si bien Monsieur Alazard, s'entraîner ne sert donc à rien à Anthony, autant aller draguer Anna...

5. Un autre jour, Anthony s'entraîne à sortir une balle du bunker (zone remplie de sable). La probabilité qu'il arrive à sortir la balle du premier coup est $p_1 = \frac{1}{2}$. Puis à cause de la fatigue, la probabilité qu'il arrive à sortir la balle du bunker à la n-ième tentative ($n \geqslant 2$), sachant qu'il a échoué aux précédentes est $p_n = \frac{1}{n+1}$. Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k l'évènement : « la balle sort du bunker à la k-ième tentative » et on considère la variable aléatoire T égale au numéro de la tentative où la balle sort du bunker et on convient que T prend la valeur 0 lorsque l'évènement « la balle ne sort jamais du bunker » est réalisé.

   La variable T est appelée en probabilités un temps d'arrêt.

   (a) Méthode 1, on réduit au même dénominateur. Méthode 2 : pour tout $x \in \mathbb{R} - \{0; -1\}$,
   $$x\frac{1}{x\,(x+1)} = \frac{1}{x+1} = a + \frac{bx}{x+1}.$$
   Par passage à la limite en 0, $a = 1$. De même
   $$b = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x} = -1.$$
   On vérifie que cela fonctionne, $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$ *ok !* Conclusion,
   $$\boxed{\text{Pour } a = 1,\ b = -1, \text{ on a } \forall x \in \mathbb{R} - \{0; -1\}, \quad \frac{1}{x\,(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.}$$
   Observer que même vers la fin, il peut se trouver des questions faciles d'où la nécessité de lire intégralement un sujet avant de commencer.

   (b) Soit n un entier naturel non nul. L'évènement $(T = n)$ signifie que la balle sort du bunker exactement à la n-ième tentative autrement dit qu'elle ne sort pas avant et sort à cette tentative. On a donc pour $n \geqslant 2$,
   $$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad (T = n) = \left(\bigcap_{k \in [\![1; n-1]\!]} \overline{S_k}\right) \bigcap S_n \quad \text{et} \quad (T = 1) = S_1.}$$

   (c) *Vraiment les probas c'est facile.* Par la question précédente et la formule des probabilités composées, pour tout entier $n \geqslant 3$,
   $$P\,(T = n) = P\left(S_n \,\middle|\, \bigcap_{k \in [\![1; n-1]\!]} \overline{S_k}\right) \times \prod_{i=2}^{n-1} P\left(\overline{S_i} \,\middle|\, \bigcap_{k \in [\![1; i-1]\!]} \overline{S_k}\right) \times P\left(\overline{S_1}\right)$$
   Donc par l'énoncé,
   $$\begin{aligned} P\,(T = n) &= p_n \times \prod_{i=2}^{n-1} \left[1 - P\left(S_i \,\middle|\, \bigcap_{k \in [\![1; i-1]\!]} \overline{S_k}\right)\right] \times [1 - P\,(S_1)] \\ &= \frac{1}{n+1} \prod_{i=2}^{n-1} \left[1 - \frac{1}{i+1}\right] \times \left[1 - \frac{1}{2}\right] \\ &= \frac{1}{n+1} \prod_{i=1}^{n-1} \left[1 - \frac{1}{i+1}\right]. \end{aligned}$$

On note que la formule est encore vraie pour $n = 2$. Donc pour tout $n \geqslant 2$,

$$P(T = n) = \frac{1}{n+1} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+1}.$$

On reconnaît un produit télescopique,

$$P(T = n) = \frac{1}{n+1}\frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Si $n = 1$, on a $P(T = 1) = P(S_1) = p_1 = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}$.

Donc $\boxed{\text{la formule est valable pour } n = 1}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P(T = n) = \frac{1}{n(n+1)}.}$$

(d) Chaque tentative pour sortir la balle du bunker prend 3 minutes. En une heure, Anthony a donc le temps de faire $\frac{60}{3} = 20$ tentatives au maximum. On cherche donc $P(T \leqslant 20)$. On a

$$P(T \leqslant 20) = \sum_{k=1}^{20} P(T = k) = \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Par la question 5.a

$$P(T \leqslant 20) = \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21} \qquad \text{par télescopage.}$$

Conclusion,

$$\boxed{P(T \leqslant 20) = \frac{20}{21}.}$$

(e) Par définition,

$$P(T = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(T = k).$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, de même que précédemment,

$$\sum_{k=1}^{N} P(T = k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Donc la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} P(T = k)$ est bien convergente et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(T = k) = \lim_{N\to+\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1.$$

Conclusion, Anthony vaincra,

$$\boxed{P(T = 0) = 0.}$$

(f) i. Par définition, pour tout réel $t \in \mathbb{R}$ pour lequel on a convergence, on a

$$\boxed{G_T(t) = E\left(t^T\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k P(T = k) = 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k(k+1)}.}$$

Nous aurons plein d'outils efficaces l'année prochaine pour ce genre de question. Résolvons cette question avec notre programme de première année.

Premier cas, si $t \in [-1;1]$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant \left|\frac{t^k}{k\,(k+1)}\right| \leqslant \frac{1}{k\,(k+1)} \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

Or la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes **positifs** la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left|\frac{t^k}{k\,(k+1)}\right|$ converge i.e. $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{t^k}{k\,(k+1)}$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Donc pour tout $t \in [-1;1]$, $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{t^k}{k\,(k+1)}$ converge.

Deuxième cas, si $t > 1$, alors par croissance comparée, $\frac{t^k}{k(k+1)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{t^k}{k\,(k+1)}$ diverge grossièrement.

Troisième cas, si $t < -1$, alors de même $\frac{t^{2k}}{2k(2k+1)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc globalement (puisqu'une suite extraite diverge) $\left(\frac{t^k}{k(k+1)}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ diverge et donc notamment ne converge pas vers 0. Dans ce cas, $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{t^k}{k\,(k+1)}$ diverge également grossièrement.

Conclusion, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{G_T(t) \text{ converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad t \in [-1;1]\,.}$$

ii. *Là aussi, cette question peut se résoudre plus simplement avec des outils de deuxième année.* On admet que (résultat de deuxième année)

$$\forall t \in \left]-1;1\right], \qquad \ln(1+t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k}$$

En posant $s = -t$, on a aussi,

$$\forall s \in \left[-1;1\right[, \qquad \ln(1-s) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k}.$$

Soit $t \in [-1;1]$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Par la question 5.a si $t \neq 0$,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{t^k}{k\,(k+1)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{t^k}{k} - \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{N} \frac{t^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{N} \frac{t^k}{k} - \frac{1}{t}\sum_{k=2}^{N+1} \frac{t^k}{k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{t^k}{k} - \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{N+1} \frac{t^k}{k} + 1$$

Donc quand $N \to +\infty$, pour tout $t \in \left[-1;1\right[\setminus \{0\}$,

$$G_T(t) = \ln(1-t) - \frac{1}{t}\ln(1-t) + 1 = 1 + \frac{t-1}{t}\ln(1-t)\,.$$

Conclusion,

$$\forall t \in [-1;1]\,, \qquad G_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{(1-t)\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \text{ et } t \neq 1 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

(g) Pour que la variable aléatoire T admette une espérance il faut et il suffit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} nP(T=n)$ converge. Or,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} nP(T=n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n+1} = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n}.$$

On reconnait la série harmonique qui diverge. Conclusion,

$$\boxed{\text{la variable aléatoire } T \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$