Banque PT - Maths B - 2021
Version pour juniors

Les parties en bleu ont été ajoutées ou modifiées par rapport sujet initial.

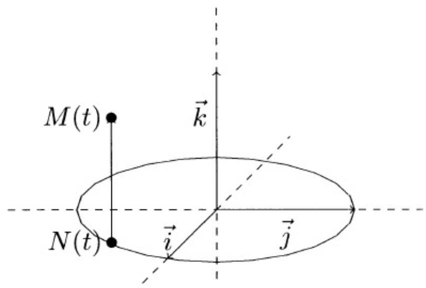
Première Partie
Modélisation d'un manège de chevaux de bois.

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle (produit scalaire, norme, ...) et d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Un manège pour enfant est constitué d'un cheval de bois tournant autour de l'axe du manège et animé d'un mouvement vertical.

Ce dispositif est schématisé par la figure ci-contre et on suppose que les coordonnées du point $M(t)$ sont

$$(x(t), y(t), z(t)) = \left(\cos(t), \sin(t), \frac{1}{4}\sin^2(t) + \frac{1}{2}\right).$$



On note $\mathcal{C}$ la courbe décrite par l'ensemble des points $M(t)$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}$.

Pour tout réel t, on appelle vecteur vitesse au point $M(t)$ le vecteur $\overrightarrow{V(t)} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{dt}}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ et vecteur accélération au point $M(t)$ le vecteur $\overrightarrow{A(t)} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{dt}^2}(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$. On note $V(t)$ et $A(t)$ les normes des vecteurs $\vec{V}(t)$ et $\vec{A}(t)$.

1. (a) Calculer $\vec{V}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Démontrer que pour tout réel t, $\vec{V}(t)$ est non nul.
   (c) On admet que la droite passant par $M(t)$ et de vecteur directeur $\vec{V}(t)$ est la tangente de la courbe $\mathcal{C}$ au point $M(t)$. Dans le cas particulier $t = \frac{\pi}{3}$, donner une équation du plan passant par $M(t)$ et orthogonal à la tangente à $\mathcal{C}$ en $M(t)$.
2. (a) Déterminer $V(t)$ et $A(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Pour quelles valeurs de t, $V(t)$ est-elle minimale ? maximale ?
   (c) Vérifier que $V(t)$ est minimale lorsque $A(t)$ est maximale. Que peut-on dire de la direction du vecteur $\overrightarrow{V(t)}$ dans ce cas ?
3. Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ est incluse dans la surface Σ d'équation $x^2 + y^2 = 1$ i.e. $M(t)$ vérifie $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$.
4. Soit Q le plan d'équation $z = 3 - \frac{3}{4}y$.
   (a) Non abordable.
   (b) Donner un vecteur unitaire normal au plan Q.
   (c) On considère la matrice $P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
      i. Démontrer que la matrice P est orthogonale i.e. $P^T = P^{-1}$.

ii. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice P. On admet que f est une rotation et que donc il existe $\mathscr{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base est donnée par $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$. Déterminer une telle base $\mathscr{B}$. Calculer $\det(P)$, $\operatorname{Tr}(P)$ et $\langle f(\vec{e_2}), \vec{e_3}\rangle$. En déduire θ.

(d) On note $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ les vecteurs $\vec{u} = \frac{1}{5}\left(-4\vec{j} + 3\vec{k}\right)$, $\vec{v} = \vec{i}$ et $\vec{w} = \frac{1}{5}\left(3\vec{j} + 4\vec{k}\right)$. **Démontrer** que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe.

(e) On note Ω le point de coordonnées $(0, 0, 3)$ dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Soit M un point de $\mathbb{R}^3$. On note (x, y, z) ses coordonnées dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, (x_1, y_1, z_1) ses coordonnées dans le repère $\left(\Omega; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et (X, Y, Z) ses coordonnées dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

i. Quelle relation existe-t-il entre les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$?

ii. Démontrer que dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, une représentation cartésienne de la courbe $\mathcal{BT}$: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 3 - \frac{3}{4}y \end{cases}$ est $\begin{cases} 16X^2 + 25Y^2 = 25 \\ Z = 0 \end{cases}$.

iii. Non abordable : En déduire la nature de $\mathcal{BT}$.

5. Soient $\Delta : \begin{cases} x = z \\ y = 1 + z \end{cases}$ et M_0 le point d'intersection de Δ avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = 3$. Déterminer l'ensemble des points du cercle de $\mathcal{P}$, d'axe (Oz) et passant par M_0.

6. Non abordable.

7. Non abordable.

Deuxième Partie

Modélisation d'un deuxième manège pour enfant.

Le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. *Question préliminaire.* Soit M un point de $\mathbb{R}^2$ d'affixe complexe z.

   (a) Donner sans justification l'affixe complexe de l'image de M par la rotation r_θ de centre O et d'angle θ.

   (b) Donner sans justification l'affixe complexe de l'image de M par la homothétie h_a de centre O et de rapport a avec $a \neq 0$.

   (c) Vérifier que $r_\theta \circ h_a = h_a \circ r_\theta$. On note alors $f_{a,\theta} = r_\theta \circ h_a$.

2. *Formules de trigonométrie.* On considère 4 réels a, b, p et q.

   (a) Donner, sans démonstration, la linéarisation de $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\cos(b)$ et $\sin(a)\sin(b)$.

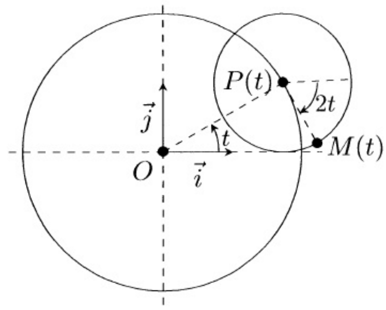
   (b) En déduire que $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ainsi qu'une factorisation de $\sin(p) + \sin(q)$.

3. Un manège pour enfant est constitué d'une plateforme tournant autour d'un axe, lui même animé d'un mouvement circulaire.

Ce dispositif est schématisé par la figure ci-contre et les mouvements des points $P(t)$ et $M(t)$ sont donnés par :

- L'affixe complexe du point $P(t)$ est $2\,\mathrm{e}^{it}$;
- L'affixe complexe du vecteur $\overrightarrow{P(t)M(t)}$ est e^{-2it}.

On note $z(t)$ l'affixe complexe du point $M(t)$ et Γ la courbe décrite par l'ensemble des points $M(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.



(a) En calculant pour tout réel t l'affixe complexe $z(t)$ du point $M(t)$ démontrer qu'une représentation paramétrique de Γ est $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) Pour tout réel t, comparer les affixes complexes de $r_{\frac{2\pi}{3}}(M(t))$ et de $M\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$. En déduire que Γ est invariante par une rotation à préciser.

(c) Justifier soigneusement que l'on peut réduire l'intervalle d'étude de Γ à $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$. On donnera à chaque étape les transformations à effectuer pour obtenir la courbe Γ en entier.

(d) Calculer $x'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et justifier les égalités :
$$x'(t) = -2\sin(t)\,(1 + 2\cos(t)) = -4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

(e) Calculer $y'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et justifier les égalités :
$$y'(t) = 2\,(1 - \cos(t))\,(1 + 2\cos(t)) = 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

(f) Dresser les tableaux de variations des fonctions x et y sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$. On précisera les valeurs prises aux bornes de cet intervalle.

(g) Déterminer une équation à la tangente à Γ au point $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ i.e. la droite passant par $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{V}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ de coordonnées $\left(x'\left(\frac{\pi}{3}\right), y'\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ et vérifier qu'elle passe par le point A de coordonnées $(2, 0)$.

(h) Déterminer un équivalent de $x(t) - x(0)$ et de $y(t) - y(0)$ quand $t \to 0$.

(i) Calculer la longueur de Γ i.e. $6\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\|\overrightarrow{V(t)}\right\| \mathrm{d}t$.

(j) Tracer Γ ainsi que ses tangentes déterminées précédemment sur la feuille de papier millimétrée fournie. On utilisera des couleurs différentes pour les différentes étapes de la construction sans oublier la légende. On donne $\sqrt{3} \approx 1,73$.
Unité : 3cm

4. Développée de Γ

(a) Non abordable.
On note Γ_1 la courbe de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 6\cos(t) - 3\cos(2t) \\ y = 6\sin(t) + 3\sin(2t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$
et $I(t)$ désigne le point de Γ_1 de paramètre $t \in \mathbb{R}$.

(b) Justifier que $f_{\theta,a}(M(t)) = I\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$, pour $\theta = \frac{\pi}{3}$ et une valeur de a à préciser, la fonction $f_{a,\theta}$ étant définie dans la question préliminaire.

(c) Indiquer une méthode de construction de Γ_1. Le tracé n'est pas demandé.

(d) Soient $t \neq 0\left[\frac{\pi}{3}\right]$ et $t' \neq 0\left[\frac{\pi}{3}\right]$.

i. Démontrer que la tangente à Γ en $M(t)$ et la tangente à Γ en $M(t')$ sont orthogonales si et seulement si $t' = t + \pi\,[2\pi]$.

ii. Non abordable.