Banque PT - Maths B - 2022
Version pour juniors

Les parties en bleu ont été ajoutées ou modifiées par rapport sujet initial.

Quelques questions de cours.

1. Soit n un entier naturel non nul. Donner la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. A quelle condition la série géométrique $\sum z^n$ converge-t-elle ? Préciser alors la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$.

3. Soit A une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$.

   (a) Donner l'univers image $A(\Omega)$, et pour tout $k \in A(\Omega)$, la valeur des probabilités $P(A = k)$.

   (b) Donner l'espérance et la variance de A.

4. Donner la forme générale d'une matrice d'une rotation du plan et d'une symétrie orthogonale du plan dans une base adaptée.

Première Partie.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note M^T sa transposée, $\mathrm{Tr}(M)$ sa trace et $\det(M)$ son déterminant. Un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est dit stable par produit si pour toutes matrices M et N de F, le produit MN appartient à F. Soient a, b et c trois réels. On note $M(a,b,c)$ la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$ et $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $M(a,b,c)$. E désigne l'ensemble des matrices $M(a,b,c)$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes $f_{a,b,c}$ lorsque (a,b,c) parcourt $\mathbb{R}^3$. Enfin on note $I = M(1,0,0)$, $J = M(0,1,0)$ et $K = M(0,0,1)$.

1. (a) Démontrer que E est un espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension.

   (b) Donner une base d'un supplémentaire de E dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On considère la fonction φ définie sur $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ par :

$$\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2,\ \varphi(M,N) = \mathrm{Tr}\left(M^T N\right).$$

   (a) Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Vérifier que les matrices I et $J+K$ sont deux vecteurs orthogonaux pour le produit scalaire φ.

   (c) Déterminer H le projeté orthogonal de la matrice K sur le sous-espace vectoriel G engendré par les matrices I et $J+K$. On donne $H = \varphi(K,I)\frac{I}{\varphi(I,I)} + \varphi(K,J+K)\frac{J+K}{\varphi(J+K,J+K)}$. En déduire la distance K à G.

   (d) En effectuant un minimum de calculs supplémentaires, donner une base orthonormée de E.

   (e) Déterminer le supplémentaire orthogonal de E dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question, on pose $\alpha = \sqrt{|bc|}$ et on suppose que $(b,c) \neq (0,0)$.

(a) Déterminer les valeurs propres réelles ou complexes de la matrice $M(a,b,c)$, c'est-à-dire les réels ou complexes λ tels que

$$\det\left(\lambda\, I_2 - M(a,b,c)\right) = 0.$$

On les exprimera en fonction de a et α et on discutera suivant le signe de bc.

(b) On suppose que $\alpha \neq 0$. Le polynôme en λ, $\det\left(\lambda\, I_2 - M(a,b,c)\right)$ est-il scindé dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

(c) Montrer que $M(a,b,c)$ n'est pas semblable à I_2.

4. (a) Déterminer l'ensemble des matrices de E qui représente une rotation dans une base orthonormée.

   (b) Soit s une symétrie appartenant à $\mathcal{E}$ distincte de l'identité et de l'application nulle. Il existe donc deux droites vectorielles distinctes D_1 et D_2 telles que s soit la symétrie sur D_1 parallèlement à D_2.

      i. Ecrire la matrice de s dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^2 = D_1 \oplus D_2$. En déduire la trace et le déterminant de s.

      ii. En déduire quelles sont les matrices $M(a,b,c)$ pour lesquelles $f_{a,b,c}$ est une symétrie (distincte de l'identité et de l'application nulle).

5. Soit p un projecteur appartenant à $\mathcal{E}$ distinct de l'identité et de l'application nulle. Il existe donc deux droites vectorielles distinctes D_1 et D_2 telles que p soit le projecteur sur D_1 parallèlement à D_2.

   (a) Ecrire la matrice de p dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^2 = D_1 \oplus D_2$. En déduire $[\cdots]$ la trace et le déterminant de p.

   (b) En déduire quelles sont les matrices $M(a,b,c)$ pour lesquelles $f_{a,b,c}$ est un projecteur (distinct de l'identité et de l'application nulle).

   (c) Préciser quels sont les projecteurs orthogonaux de $\mathcal{E}$ et en donner les éléments caractéristiques. On pourra utiliser la question 4 $\leftarrow$ *ne pas faire cela ! NdP*

6. Le produit de deux matrices de E est-il toujours une matrice de E ?

7. L'objectif de cette question est de déterminer les droites vectorielles Δ de E qui sont stables par produit. Soit Δ une droite vectorielle engendrée par $M_0 = M(a_0, b_0, c_0)$.

   (a) Démontrer que Δ est stable par produit si et seulement si $M_0^2 \in \Delta$.

   (b) On suppose que $M_0^2 \in \Delta$.

      i. Justifier qu'il existe un réel λ tel que $M_0^2 = \lambda\, M_0$.

      ii. Démontrer que si $\lambda = 0$, alors M_0 est proportionnelle à J ou K.

      iii. On suppose que $\lambda \neq 0$. On pose $M_0' = \frac{1}{\lambda} M_0$. Démontrer que M_0' est la matrice canoniquement associée à un projecteur.

   (c) Conclure.

8. L'objectif de cette question est de déterminer les plans vectoriels de E stables par produit.

   (a) Vérifier que le plan vectoriel engendré par I et J est stable par produit.

   (b) Le plan vectoriel engendré par J et K est-il stable par produit ?

   (c) Vérifier que l'ensemble des matrices symétriques de E est un plan vectoriel stable par produit.

   (d) Soit $(b,c) \neq (0,0)$. Démontrer que le sous-espace vectoriel engendré par I et $bJ + cK$ est stable par produit.

   (e) Démontrer que les seuls plans vectoriels de E stables par produit sont ceux de la question précédente.

Deuxième Partie.

L'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire et de son repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ usuels. Soient a et b deux réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$. On considère alors la conique / le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ $C_{a,b}$ d'équation : $ax^2 + 2bxy + ay^2 - 4(x+y) = 4$.

1. Dans cette question uniquement $a = 5$ et $b = -3$.
   (a) On pose $O'(1,1)$, $\vec{i}\,' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $\vec{j}\,' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ et $\mathcal{R}' = \left(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,'\right)$. Déterminer l'équation de $C_{5,-3}$ dans le repère $\mathcal{R}'$.
   (b) Tracer la conique $C_{5,-3}$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On utilisera la feuille de papier millimétré non fournie et on prendra une unité de 4cm.
   (c) On admet que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ est la matrice associée à $C_{a,b}$. On pose

$$\operatorname{Sp}(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ AX = \lambda X \right\}.$$

   Dès lors, on a les types de coniques suivants :
   - Si $0 \in \operatorname{Sp}(A)$ alors on dira que $C_{a,b}$ est une parabole.
   - Si $\operatorname{Sp}(A)$ possède un seul élément ou deux éléments non nuls et de même signe alors on dira que $C_{a,b}$ est une ellipse.
   - Si $\operatorname{Sp}(A)$ possède deux éléments non nuls et de signes opposés alors on dira que $C_{a,b}$ est une hyperbole.

   Déterminer en fonction de a et b le type de conique qu'est $C_{a,b}$.

On dit qu'une variable aléatoire A définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ suit une loi géométrique de paramètre p, noté $A \sim \mathscr{G}(p)$ si et seulement si

$$A(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(N = k) = (1-p)^{k-1} p.$$

On considère désormais la conique $C_{A,B}$ d'équation : $Ax^2 + 2Bxy + Ay^2 - 4(x+y) = 4$ où A et B sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètres respectifs $p_A \in]0;1[$ et $p_B \in]0;1[$. On définit la variable aléatoire X par $X(\Omega) = \{-1;0;1\}$ et :

- $X = 1$ si $C_{A,B}$ est du type ellipse,
- $X = 0$ si $C_{A,B}$ est du type parabole,
- $X = -1$ si $C_{A,B}$ est du type hyperbole.

2. Détermination de la loi de X.
   (a) Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (1-p_A)^{k-1}(1-p_B)^{k-1}$.
   (b) Justifier que $P(A+B=0) = 0$.
   (c) Justifier que $P(X=0) = P(A=B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(A=k)\,P(B=k)$.
   (d) En déduire que $P(X=0) = \frac{p_A p_B}{p_A - p_A p_B + p_B}$.
   (e) Justifier que pour tout entier $k \geqslant 1$, $P(B > k) = (1-p_B)^k$.
   (f) En déduire que $P(B > A) = \frac{p_A(1-p_B)}{p_A - p_A p_B + p_B}$.

(g) En déduire $P(X=-1)$ puis $P(X=1)$.

(h) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X.

Troisième Partie.

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire et de son repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ usuels. On considère alors la courbe Γ d'équations :

$$\begin{cases} x^2+4y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$$

On note S la surface de révolution obtenue en faisant tourner la courbe Γ autour de l'axe des ordonnées (Oy).

1. (a) Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. Justifier par un schéma que l'équivalence suivante :

$$M \in S \;\Leftrightarrow\; \exists M_0 \in \Gamma, \begin{cases} \left\langle \overrightarrow{OM}, \vec{j}\right\rangle \vec{j} = \left\langle \overrightarrow{OM_0}, \vec{j}\right\rangle \vec{j} \\ OM = OM_0 \end{cases}.$$

En déduire qu'une équation cartésienne de S est : $x^2+4y^2+z^2=4$.

(b) On pose $f:(x,y,z) \mapsto x^2+4y^2+z^2-4$ et $\nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \end{bmatrix}$ et on dit que $M(x,y,z)$ de S est régulier si $\nabla f(x,y,z) \neq \vec{0}$. Démontrer que tous les points de S sont réguliers.

(c) Déterminer une équation du plan tangent à S au point A de coordonnées $\left(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}\right)$ autrement dit le plan passant par A et de vecteur normal $\nabla f\left(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}\right)$.

2. On note $\vec{u}$ le vecteur $\vec{i}+\vec{k}$. On considère Λ_1 l'ensemble des points M de S tels que la normale au plan tangent à S en M est orthogonale à $\vec{u}$.

(a) Démontrer que les équations cartésiennes de Λ_1 sont : $\begin{cases} x^2+4y^2+z^2=4 \\ x+z=0 \end{cases}$.

(b) Déterminer une équation cartésienne de la surface $[\cdots]$ Σ_1 engendrée par les / qui est l'union des droites passant par un point de Λ_1 et dirigées par $\vec{u}$.

(c) Soit D_1 une droite passant par un point de Λ_1 et dirigées par $\vec{u}$. Démontrer que le plan tangent à Σ_1 est le même en tout point régulier de D_1. *Pour calculer la normale au plan tangent on utilisera à nouveau le gradient i.e. ∇g avec une fonction g découlant de la question précédente.*

3. On note Ω le point de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(0,0,4)$. On considère Λ_2 l'ensemble des points M de S tels que la normale au plan tangente à S en M soit orthogonale à la droite (ΩM).

(a) Démontrer que les équations cartésiennes de Λ_2 sont : $\begin{cases} x^2+4y^2=3 \\ z=1 \end{cases}$.

(b) On note Σ_2 la surface $[\vdots]$ engendrée par les / qui est l'union des droites (ΩM) où M parcourt Λ_2.
Soit N un point de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x,y,z). Démontrer que $N \in \Sigma_2$ si et seulement si $N=\Omega$ ou $\frac{3x^2}{(4-z)^2}+\frac{12y^2}{(4-z)^2}=1$.

(c) En déduire qu'une équation cartésienne de Σ_2 est : $3x^2+12y^2=(4-z)^2$.

(d) Déterminer les points non réguliers de Σ_2.

(e) Soit D_2 une droite (ΩM) avec $M \in \Lambda_2$. Démontrer que le plan tangent à Σ_2 est le même en tout point régulier de D_2.

Fin de l'épreuve