Corrigé - Banque PT - Maths B - 2022
Version pour juniors

Les réponses en bleu sont les réponses des questions ajoutées ou modifiées par rapport sujet initial.

Quelques questions de cours.

Même pas des maths, juste de la pure récitation !

1. Soit n un entier naturel non nul. On a
$$\boxed{\dim\left(\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)\right) = n^2.}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a
$$\boxed{\sum z^n \text{ converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad |z| < 1.}$$
Dans ce cas,
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.}$$

3. Soit A une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$.
   (a) On a
$$\boxed{A\left(\Omega\right) = [\![0;n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in A\left(\Omega\right), \qquad P\left(A = k\right) = \binom{n}{k} p^k \left(1-p\right)^{n-k}.}$$
   (b) De plus,
$$\boxed{\mathbb{E}\left(A\right) = np, \qquad \mathbb{V}\left(A\right) = np\left(1-p\right).}$$

4. Soit $\mathscr{B} = \left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ une base orthonormée du plan et r une rotation du plan d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On a
$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}\left(r\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta\right) & -\sin\left(\theta\right) \\ \sin\left(\theta\right) & \cos\left(\theta\right) \end{pmatrix}.}$$
Soit s la symétrie orthogonale par rapport à $\operatorname{Vect}\left(\vec{e_1}\right)$. On a
$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}\left(s\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Première Partie.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$. On note M^T sa transposée, $\operatorname{Tr}\left(M\right)$ sa trace et $\det\left(M\right)$ son déterminant. Un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$ est dit stable par produit si pour toutes matrices M et N de F, le produit MN appartient à F. Soient a, b et c trois réels. On note $M\left(a,b,c\right)$ la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$ et $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $M\left(a,b,c\right)$. E désigne l'ensemble des matrices $M\left(a,b,c\right)$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes $f_{a,b,c}$ lorsque $\left(a,b,c\right)$ parcourt $\mathbb{R}^3$. Enfin on note $I = M\left(1,0,0\right)$, $J = M\left(0,1,0\right)$ et $K = M\left(0,0,1\right)$.

1. (a) Par définition,

$$E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

On observe alors les points suivants,

- $E \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
- Si $M = 0_2$, alors en prenant $a = b = c$, on a $M = 0_2 = M(0,0,0) \in E$.
- Soients $(M, M') \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors, il existe $(a,b,c,a',b',c') \in \mathbb{R}^6$ tel que $M = M(a,b,c)$ et $M' = M(a',b',c')$. Dès lors,

$$\begin{aligned} \lambda M + \mu N &= \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & a' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a + \mu a' & \lambda b + \mu b' \\ \lambda c + \mu c' & \lambda a + \mu a' \end{bmatrix} \\ &= M\left(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c'\right) \in E. \end{aligned}$$

  Donc E est stable par combinaisons linéaires.

On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donc

$$\boxed{E \text{ est un espace vectoriel.}}$$

On pouvait aussi écrire E directement sous forme de Vect.

De plus, posons $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} = aI_2 + bE_{12} + cE_{12} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathrm{Vect}\left(I_2, E_{12}, E_{21}\right).$$

Donc $\mathscr{B}_E = (I_2, E_{12}, E_{21})$ engendre E. Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha I_2 + \beta E_{12} + \gamma E_{21} = 0_2.$$

Alors, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} = 0_2$ et donc par unicité des coefficients d'une matrice, $\alpha = \beta = \gamma = 0_{\mathbb{R}}$. Ainsi, $\mathscr{B}_E$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_E \text{ est une base de } E \text{ et } \dim(E) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_E) = 3.}$$

(b) Posons $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathscr{B}_F = (E_{22})$ et $F = \mathrm{Vect}(B_F)$.

- $\mathscr{B}_E$ est une base de E,
- $\mathscr{B}_F$ engendre F et est constitué d'un vecteur non nul donc est libre et est donc une base de F,
- Posons $\mathscr{B}_{E+F} = (\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F)$. Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$aI_2 + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22} = 0.$$

  Alors,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a+d \end{pmatrix} = 0_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = b = c = 0 \\ a + d = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c = d = 0.$$

  Donc $\mathscr{B}_{E+F}$ est libre. De plus, $\mathrm{Card}(\mathscr{B}_{E+F}) = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$. Donc $\mathscr{B}_{E+F}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Conclusion, par le théorème de la base adaptée,

$$\boxed{F = \text{Vect}\left(E_{22}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est un suppémentaire de } E \text{ dans } \mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right).}$$

2. On considère la fonction φ définie sur $\left(\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)\right)^2$ par :

$$\forall \left(M, N\right) \in \left(\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)\right)^2, \; \varphi\left(M, N\right) = \text{Tr}\left(M^T N\right).$$

(a) *Un grand classique de seconde année qui peut se généraliser pour des matrices de $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$.* On commence par observe que φ est bien définie sur $\left(\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)\right)^2$ et retourne bien un réel. De plus, on a les points suivants.

- *(symétrie)* Pour tout $\left(M, N\right) \in \left(\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)\right)^2$, on a

$$\begin{aligned} \varphi\left(M, N\right) = \text{Tr}\left(M^T N\right) &= \text{Tr}\left(\left(M^T N\right)^T\right) && \text{par propriété de la trace} \\ &= \text{Tr}\left(N^T M\right) = \varphi\left(N, M\right). \end{aligned}$$

  Donc φ est symétrie.

- *(bilinéarité)* Pour tout $\left(M_1, M_2, N\right) \in \left(\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)\right)^3$ et $\left(\lambda, \mu\right) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi\left(\lambda M_1 + \mu M_2, N\right) &= \text{Tr}\left(\left(\lambda M_1 + \mu M_2\right)^T N\right) \\ &= \text{Tr}\left(\lambda M_1^T N + \mu M_2^T N\right) && \text{par linéarité de la transposée} \\ &= \lambda \text{Tr}\left(M_1^T N\right) + \mu \text{Tr}\left(M_2^T N\right) && \text{par linéarité de la trace} \\ &= \lambda \varphi\left(M_1, N\right) + \mu \varphi\left(M_2, N\right). \end{aligned}$$

  Donc φ est linéaire à gauche et par symétrie, φ est aussi linéaire à droite donc φ est bilinéaire.

- *(positivité)* Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$. On a

$$\varphi\left(M, M\right) = \text{Tr}\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \text{Tr}\left(\begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}\right) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

  Notamment, $\varphi\left(M, M\right) \geqslant 0$ et φ est positive.

- *(définie)* Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$ telle que $\varphi\left(M, M\right) = 0$. Par le point précédent, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$ et donc $a = b = c = d = 0$. Ainsi, $M = 0_2$. Donc φ est bien définie.

Par ces différents points, on en conclut que

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right).}$$

(b) On calcule,

$$\varphi\left(I, J + K\right) = \text{Tr}\left(I^T\left(J + K\right)\right) = \text{Tr}\left(J + K\right) = \text{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0_{\mathbb{R}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{I \text{ et } J + K \text{ sont orthogonaux pour le produit scalaire } \varphi.}$$

(c) On a les égalités entre matrices suivantes :

$$\begin{aligned}
H &= \varphi(K,I)\frac{I}{\varphi(I,I)}+\varphi(K,J+K)\frac{J+K}{\varphi(J+K,J+K)}\\
&= \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}^T I\right)\frac{I}{\mathrm{Tr}\left(I^TI\right)}+\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)\frac{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}{\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)}\\
&= \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)\frac{I}{\mathrm{Tr}(I)}+\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)\frac{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}{\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)}\\
&= 0+\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)\frac{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}{\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion, le projeté orthogonal de K sur $G=\mathrm{Vect}(I,J+K)$ est

$$\boxed{H=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.}$$

Dès lors, on en déduit que la distance de K à G est donnée par la longueur KH. On a

$$KH^2=\varphi\left(\overrightarrow{KH},\overrightarrow{KH}\right)=\varphi\left(\begin{pmatrix}0&1/2\\-1/2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1/2\\-1/2&0\end{pmatrix}\right).$$

Par la formule $\varphi(M,M)=a^2+b^2+c^2+d^2$ établie précédemment, on obtient,

$$KH^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Conclusion, la distance de K à G vaut

$$\boxed{d(K,G)=\frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

(d) *Vous verrez l'année prochaine le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (rien que le nom est un défi). En voici une petite version ad hoc et instinctive.* On sait que $(I,J+K)$ forme une famille orthogonale. Commençons par normaliser ces vecteurs. On a

$$\|I\|^2=\varphi(I,I)=1^2+0^2+0^2+1^2=2.$$

On pose donc $E_1=\frac{I}{\sqrt{2}}$. De même,

$$\|J+K\|^2=\left\|\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\|^2=0^2+1^2+1^2+0^2=2.$$

On pose donc $E_2=\frac{J+K}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. Alors (E_1,E_2) est toujours orthogonale, toujours dans E et est aussi normée. Il nous faut la compléter par un dernier vecteur (car E est de dimension 3).

Puisque H est le projeté de K sur G, alors la matrice $K-H$ (correspondant au vecteur $\overrightarrow{HK}$) est orthogonale à G et donc à I et $J+K$ et donc à E_1 et E_2. On a

$$K-H=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1/2\\1/2&0\end{pmatrix}.$$

Normalisons ce vecteur. On sait que

$$\|K-H\|=d\,(K,G)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Posons donc $E_3=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}(K-H)=\sqrt{2}\begin{pmatrix}0&-1/2\\1/2&0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$. La famille $\mathscr{E}=(E_1,E_2,E_3)$ est orthonormée, notamment elle est libre (résultat de deuxième année. Démontrer-le si vous n'en êtes pas convaincu). Puisque $K\in E$, $H\in G\subseteq E$, on a $E_3\in E$. Donc $\mathscr{E}$ est une famille libre de E et $\mathrm{Card}\,(\mathscr{E})=\dim(E)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{E}=(E_1,E_2,E_3)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}I_2,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right)\text{ est une base orthonormée de }E.}$$

(e) On cherche un supplémentaire orthogonal de E dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Vu que E est un hyperplan (de dimension celle de l'espace total moins un), tout supplémentaire de E est de dimension une. On cherche donc un quatrième vecteur E_4 normé et orthogonal à E_1, E_2 et E_3. On sait que $\mathrm{Vect}\,(E_{22})$ est un supplémentaire de E. Donc (E_1,E_2,E_3,E_{22}) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $U\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Il existe $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que

$$E_4=aE_1+bE_2+cE_3+dE_{22}.$$

On veut E_4 orthogonal à E_1, E_2 et E_3. Autrement dit,

$$\begin{cases}\varphi(E_4,E_1)=0\\\varphi(E_4,E_2)=0\\\varphi(E_4,E_3)=0\end{cases}.$$

Par linéarité à droite, on a

$$\varphi(E_4,E_1)=a\,\varphi(E_1,E_1)+b\,\varphi(E_2,E_1)+c\,\varphi(E_3,E_1)+d\,\varphi(E_{22},E_1)=a+d\,\varphi(E_{22},E_1),$$

car (E_1,E_2,E_3) est orthonormée. De même, $\varphi(E_4,E_2)=b+d\,\varphi(E_{22},E_2)$ et $\varphi(E_4,E_3)=b+d\,\varphi(E_{22},E_3)$. Or

$$\varphi(E_{22},E_1)=\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}I_2\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\varphi(E_{22},E_2)=\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=0$$
$$\varphi(E_{22},E_3)=\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}E_4\perp(E_1,E_2,E_3)\quad&\Leftrightarrow\quad\begin{cases}a+\frac{d}{\sqrt{2}}=0\\b=0\\c=0\end{cases}\\&\Leftrightarrow\quad\begin{cases}a=-\frac{d}{\sqrt{2}}\\b=0\\c=0\end{cases}\\&\Leftrightarrow\quad E_4=dE_{22}-\frac{d}{\sqrt{2}}E_1=d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}-\frac{d}{2}I_2=d\begin{pmatrix}-1/2&0\\0&1/2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On peut prendre $d=1$. Sinon, si l'on veut normaliser E_4 (non obligatoire ici) :

$$\|E_4\|^2 = \varphi(E_4, E_4) = \frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{4} = \frac{d^2}{2}.$$

On prend donc $d=\sqrt{2}$. Finalement,

$$E_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion, le supplémentaire orthogonal de E dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est donné par

$$\boxed{E^\perp = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).}$$

3. Dans cette question, on pose $\alpha = \sqrt{|bc|}$ et on suppose que $(b,c) \neq (0,0)$.

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a les calculs suivants

$$\det(\lambda I_2 - M(a,b,c)) = \begin{vmatrix} \lambda - a & b \\ c & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a)^2 - bc$$

Premier cas, si $bc \geqslant 0$, alors $bc = \alpha^2$ et donc

$$\det(\lambda I_2 - M(a,b,c)) = (\lambda - a)^2 - \alpha^2 = (\lambda - a - \alpha)(\lambda - a + \alpha).$$

Dans ce cas, les valeurs propres de $M(a,b,c)$ sont $a+\alpha$ et $a-\alpha$. *Deuxième cas,* si $bc<0$, alors $bc = -\alpha^2$ et donc

$$\det(\lambda I_2 - M(a,b,c)) = (\lambda - a)^2 + \alpha^2 = (\lambda - a)^2 - i^2\alpha^2 = (\lambda - a - i\alpha)(\lambda - a + i\alpha).$$

Dans ce cas, les valeurs propres de $M(a,b,c,)$ sont $a+i\alpha$ et $a-i\alpha$.
Conclusion les valeurs propres de $M(a,b,c)$ sont

$$\boxed{\begin{cases} a+\alpha \text{ et } a-\alpha & \text{si } bc \geqslant 0 \\ a+i\alpha \text{ et } a-i\alpha & \text{si } bc \leqslant 0. \end{cases}}$$

(b) On suppose que $\alpha \neq 0$. Par la question précédente, si $bc \geqslant 0$, alors $\det(\lambda I_2 - M(a,b,c)) = (\lambda - a - \alpha)(\lambda - a + \alpha)$ est scindé dans $\mathbb{R}$ et donc dans $\mathbb{C}$ aussi. D'autre part, si $bc<0$, alors, on a $\det(\lambda I_2 - M(a,b,c)) = (\lambda - a)^2 + \alpha^2$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$ (le polynôme est irréductible) mais est scindé dans $\mathbb{C}$, $\det(\lambda I_2 - M(a,b,c)) = (\lambda - a - i\alpha)(\lambda - a + i\alpha)$. Conclusion, le polynôme est

$$\boxed{\text{toujours scindé dans } \mathbb{C} \text{ et est scindé dans } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } bc \geqslant 0.}$$

(c) Procédons par l'absurde. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M(a,b,c)$ est semblable à I_2 i.e. $\exists P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, $M(a,b,c) = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$. Dans ce cas, $a=1$, $b=c=0$. Or $(b,c) \neq (0,0)$, contradiction. Conclusion,

$$\boxed{\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ (b,c) \neq (0,0), \qquad M(a,b,c) \text{ n'est pas semblable à } I_2.}$$

4. (a) Soit $M(a,b,c) \in E$ représentant une matrice de rotation dans une base orthonormée. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos(\theta) = a \\ \sin(\theta) = -b = c \end{cases}$$

Donc $a^2 + b^2 = 1$. Réciproquement, si $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c = -b \end{cases}$. Alors la première ligne implique qu'il existe $\theta' \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta')$ et $b = \sin(\theta')$ et par la seconde ligne, $c = -b = -\sin(\theta')$. En posant $\theta = -\theta'$, on obtient

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et $M(a,b,c)$ est la matrice d'une rotation dans n'importe quelle base orthonormée. Conclusion, l'ensemble des matrices de E qui représente une rotation dans une base orthonormée est donné par

$$\boxed{\mathscr{R} = \left\{ M(a,b,c) \in E \;\middle|\; \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c = -b \end{cases} \right\}.}$$

(b) Soit s une symétrie appartenant à $\mathcal{E}$ distinct de l'identité et de l'application nulle. Il existe donc deux droites vectorielles distinctes D_1 et D_2 telles que s soit la symétrie sur D_1 parallèlement à D_2.

i. Soient u_1 un vecteur directeur de D_1 et u_2 de D_2. Alors,

$$\boxed{\operatorname{mat}_{(u_1,u_2)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

En particulier,

$$\boxed{\operatorname{Tr}(s) = 0 \quad \text{et } \det(s) = -1.}$$

Il est sous-entendu ici que la trace (ou le déterminant) de s est celui de sa matrice dans n'importe quelle base. Ce résultat de deuxième année provient de propriétés de la trace et du déterminant (on dit que ce sont des invariants) : si A et D représente un même endomorphisme f, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^{-1}$. Par suite,

$$Tr(A) = Tr\left(PDP^{-1}\right) = Tr\left(DP^{-1}P\right) = Tr(D).$$

De plus,

$$det(A) = det\left(PDP^{-1}\right) = det(P)\, det(D)\, det\left(P^{-1}\right) = det(P)\, det(D) \frac{1}{det(P)} = det(D).$$

ii. Soit $M(a,b,c) \in E$ telle que $f_{a,b,c}$ soit une symétrie distincte de l'identité et de l'application nulle. Alors par la question précédente,

$$0 = \operatorname{Tr}(M(a,b,c)) = 2a \quad \text{et } -1 = \det(M(a,b,c)) = a^2 - bc.$$

Donc $a = 0$ et $bc = 1$ i.e. $b \neq 0$ et $c = \frac{1}{b}$. Dès lors, $M(a,b,c) = M\left(0,b,\frac{1}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$. Réciproquement , pour $b \in \mathbb{R}^*$, alors

$$M\left(0,b,\frac{1}{b}\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix} = I_2.$$

Donc $M\left(0, b, \frac{1}{b}\right)$ est bien la matrice d'une symétrie (distincte de l'identité et de l'application nulle). Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ M\left(0, b, \frac{1}{b}\right) \in E \;\middle|\; b \in \mathbb{R}^* \right\}.}$$

5. Soit p un projecteur appartenant à $\mathcal{E}$ distinct de l'identité et de l'application nulle. Il existe donc deux droites vectorielles distinctes D_1 et D_2 telles que p soit le projecteur sur D_1 parallèlement à D_2.

   (a) Soient u_1 un vecteur directeur de D_1 et u_2 de D_2. On a $p(u_1) = u_1$ et $p(u_2) = 0$. Donc dans la base (u_1, u_2), on a
   $$\boxed{\operatorname{mat}_{(u_1,u_2)}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$
   De plus,
   $$\boxed{\operatorname{Tr}(p) = 1 \quad \text{et} \quad \det(p) = 0.}$$

   (b) Soit $M(a, b, c) \in E$ telle que $f_{a,b,c}$ soit un projecteur. Alors, par la question précédente,
   $$1 = \operatorname{Tr}(M(a, b, c)) = 2a \quad \text{et} \quad 0 = \det(M(a, b, c)) = a^2 - bc.$$
   Donc $a = \frac{1}{2}$ et $bc = a^2 = \frac{1}{4}$ donc $b \neq 0$ et $c = \frac{1}{4b}$. Ainsi,
   $$M(a, b, c) = M\left(\frac{1}{2}, b, \frac{1}{4b}\right).$$
   Réciproquement, soit $b \in \mathbb{R}^*$. Alors,
   $$M\left(\frac{1}{2}, b, \frac{1}{4b}\right)^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & b \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & b \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & b \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = M\left(\frac{1}{2}, b, \frac{1}{4b}\right).$$
   Donc $M\left(\frac{1}{2}, b, \frac{1}{4b}\right)$ est bien la matrice d'un projecteur. Conclusion, l'ensemble recherché est
   $$\boxed{\mathscr{P} = \left\{ M\left(\frac{1}{2}, b, \frac{1}{4b}\right) \in E \;\middle|\; b \in \mathbb{R}^* \right\}.}$$

   (c) On note que l'identité et l'application nulle sont des projecteurs orthogonaux de $\mathcal{E}$. Soit p un projecteur de $\mathcal{E}$ distinct de l'identité et de l'application nulle. D'après la question précédente, il existe $b \in \mathbb{R}^*$ tel que $p = f_{\frac{1}{2}, b, \frac{1}{4b}}$. Déterminons les éléments caractéristiques de p. Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On a
   $$\begin{aligned}
   X \in \operatorname{Ker}\left(M\left(\frac{1}{2}, b, \frac{1}{4b}\right) - I_2\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1/2 & b \\ 1/(4b) & -1/2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0_2 \\
   &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\frac{x}{2} + by = 0 \\ \frac{x}{4b} - \frac{y}{2} = 0 \end{cases} \\
   &\Leftrightarrow \quad -\frac{x}{2} + by = 0 \qquad \text{car } L_2 = -\frac{1}{2b}L_1 \\
   &\Leftrightarrow \quad x = 2by \\
   &\Leftrightarrow \quad X = y\begin{bmatrix} 2b \\ 1 \end{bmatrix}.
   \end{aligned}$$

Donc p est un projecteur sur $D_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}2b\\1\end{bmatrix}\right)$. De même,

$$\begin{aligned}
X \in \mathrm{Ker}\left(M\left(\frac{1}{2}, b, \frac{1}{4b}\right)\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1/2 & b\\ 1/(4b) & 1/2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = 0_2\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\frac{x}{2} + by = 0\\ \frac{x}{4b} + \frac{y}{2} = 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} + by = 0 \qquad \text{car } L_2 = \frac{1}{2b}L_1\\
&\Leftrightarrow \quad x = -2by\\
&\Leftrightarrow \quad X = y\begin{bmatrix}-2b\\1\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc p est un projecteur parallèlement à $D_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-2b\\1\end{bmatrix}\right)$. Or

$$D_1 \perp D_2 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix}2b\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2b\\1\end{bmatrix}\right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4b^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{1}{2} \text{ OU } b = -\frac{1}{2}.$$

Conclusion, il y a exactement quatre projecteurs orthogonaux dont les matrices dans la base canonique sont

$$\boxed{M(1,0,0), \qquad M(0,0,0),}$$

$$\boxed{M(1/2, 1/2, 1/2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M(1/2, -1/2, -1/2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}.}$$

$\boxed{\text{L 'identité est un projecteur sur } \mathbb{R}^2 \text{ parallèlement à } \{0_{\mathbb{R}^2}\},}$

$\boxed{\text{l'application nulle est un projecteur sur } \{0_{\mathbb{R}^2}\} \text{ parallèlement à } \mathbb{R}^2,}$

$f_{1/2,1/2,1/2}$ est un projecteur

$$\boxed{\text{sur } D_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) \text{ et parallèlement à } D_2 = D_1^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right).}$$

$f_{1/2,-1/2,-1/2}$ est un projecteur sur

$$\boxed{\text{sur } D_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right) \text{ et parallèlement à } D_1 = D_2^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right).}$$

6. On note par exemple que $J + K = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \in E$ et $J - K = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} \in E$ et pourtant

$$(J+K)(J-K) = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \notin E.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{le produit de deux matrices de } E \text{ n'est pas toujours une matrice de } E.}$$

7. L'objectif de cette question est de déterminer les droites vectorielles Δ de E qui sont stables par produit. Soit Δ une droite vectorielle engendrée par $M_0 = M(a_0, b_0, c_0)$.

(a) Si Δ est stable par produit alors puisque $M_0 \in \Delta$, on a directement $M_0^2 \in \Delta$. Réciproquement, supposons que $M_0^2 \in \Delta$. Soit $(M_1, M_2) \in \Delta^2$. Puisque M_0 engendre Δ, il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in bbR^2$ tel que $M_1 = \lambda_1 M_0$ et $M_2 = \lambda_2 M_0$. Dès lors,

$$M_1 M_2 = \lambda_1 \lambda_2 M_0^2.$$

Puisque $M_0^2 \in \Delta$ et que Δ est un espace vectoriel (donc stable par multiplication externe), on obtient que $M_1 M_2 \in \Delta$. Ceci étant vrai pour tout couple d'éléments de Δ, on en déduit que Δ est stable par produit. Conclusion,

$$\boxed{\Delta \text{ stable par produit} \qquad \Leftrightarrow \qquad M_0^2 \in \Delta.}$$

(b) On suppose que $M_0^2 \in \Delta$.

i. Par hypothèse, $\Delta = \operatorname{Vect}(M_0)$. Donc par définition, si $M_0^2 \in \operatorname{Vect}(M_0)$, alors

$$\boxed{\exists\, \lambda \in \mathbb{R}, \qquad M_0^2 = \lambda\, M_0.}$$

ii. Calculons :

$$M_0^2 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^2 + b_0 c_0 & 2a_0 b_0 \\ 2a_0 c_0 & a_0^2 + b_0 c_0 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, si $\lambda = 0$ i.e. $M_0^2 = 0_2$, alors

$$\begin{cases} a_0^2 + b_0 c_0 = 0 \\ 2a_0 b_0 = 0 \\ 2a_0 c_0 = 0 \\ a_0^2 + b_0 c_0 = 0 \end{cases}.$$

Supposons $a_0 \neq 0$. Dans ce cas,

$$\begin{cases} a_0^2 + b_0 c_0 = 0 \\ b_0 = 0 \\ c_0 = 0 \\ a_0^2 + b_0 c_0 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad a_0 \qquad \text{contradiction.}$$

Donc $a_0 = 0$ et par suite $b_0 c_0 = 0$ donc $b_0 = 0$ ou $c_0 = 0$. On obtient donc $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_0 & 0 \end{pmatrix} = c_0 K$ ou $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = b_0 J$. Conclusion,

$$\boxed{\text{si } \lambda = 0, \text{ alors } M_0 \text{ est proportionnelle à } J \text{ ou } K.}$$

iii. On suppose que $\lambda \neq 0$. On pose $M_0' = \frac{1}{\lambda} M_0$. Alors, $(M_0')^2 = \frac{1}{\lambda^2} M_0^2$. Or par hypothèse, $M_0^2 = \lambda\, M_0$. Donc

$$(M_0')^2 = \frac{1}{\lambda^2}\, \lambda\, M_0 = \frac{1}{\lambda} M_0 = M_0'.$$

Conclusion,

$$\boxed{M_0' \text{ est la matrice canoniquement associée à un projecteur.}}$$

(c) Procédons par analyse-synthèse. Si $M_0^2 \in \Delta$, alors $M_0^2 = \lambda M_0$. Si $\lambda = 0$ alors, on a vu qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $M_0 = \mu J$ ou $M_0 = \mu K$. Si $\lambda \neq 0$, alors $\frac{1}{\lambda} M_0$ est une matrice de E (car $M_0 \in \Delta \subseteq E$) d'un projecteur. Donc par la question 5.b, $M_0 = O_2$ impossible car M_0 engendre une droite, $M_0 = I_2$ ou il existe $b \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\frac{1}{\lambda} M_0 = \begin{pmatrix} 1/2 & b \\ 1/(4b) & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad M_0 = \lambda \begin{pmatrix} 1/2 & b \\ 1/(4b) & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement,

- si $M_0 = \mu J$. Alors, $M_0^2 = \mu^2 J^2 = \mu^2 O_2 = O_2 \in \Delta$.
- De même, si $M_0 = \mu K$, alors $M_0^2 = 0_2 \in \Delta$.
- Si $M_0 = I_2 = I$, alors $M_0^2 = M_0 \in \Delta$.
- Enfin, si $M_0 = \lambda \begin{pmatrix} 1/2 & b \\ 1/(4b) & 1/2 \end{pmatrix}$, $p \in \mathbb{R}^*$, alors, par la question 5.b $\begin{pmatrix} 1/2 & b \\ 1/(4b) & 1/2 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un projecteur. Donc

$$M_0^2 = \lambda^2 \begin{pmatrix} 1/2 & b \\ 1/(4b) & 1/2 \end{pmatrix} = \lambda M_0 \in \Delta.$$

Conclusion, par la question 7.a on en déduit que Δ est stable par produit si et seulement si

$$\boxed{\Delta = \mathrm{Vect}\,(I) \qquad \text{OU} \qquad \Delta = \mathrm{Vect}\,(J) \qquad \text{OU} \qquad \Delta = \mathrm{Vect}\,(K)}$$

$$\boxed{\text{OU} \quad \exists p \in \mathbb{R}^*,\ \Delta = \mathrm{Vect}\,(M\,(1/2, b, 1/(4b)))\,.}$$

8. L'objectif de cette question est de déterminer les plans vectoriels de E stables par produit.

(a) Posons $P_1 = \mathrm{Vect}\,(I, J)$. Soit $(M, M') \in P_1^2$. Il existe alors $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = aI + bJ$ et $M' = a'I + b'J$. Par suite,

$$MM' = aa'I^2 + ab'IJ + a'bJI + bb'J^2 = aa'I + \big(ab' + a'b\big)\,J + 0_2 \in P_1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{le plan vectoriel engendré par } I \text{ et } J \text{ est stable par produit.}}$$

(b) On a déjà observé que $(J + K)\,(J - K) \notin E$, donc en particulier $(J + K)\,(J - K) \notin \mathrm{Vect}\,(J, K)$. Or $J + K \in \mathrm{Vect}\,(J, K)$ et $J - K \in \mathrm{Vect}\,(J, K)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{le plan vectoriel engendré par } J \text{ et } K \text{ n'est pas stable par produit.}}$$

(c) Soit $M\,(a, b, c) \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$M\,(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2\,(\mathbb{R}) \qquad \Leftrightarrow \qquad b = c \qquad \Leftrightarrow \qquad M\,(a, b, c) = M\,(a, b, b)\,.$$

Ainsi,

$$E \cap \mathcal{S}_2\,(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\,(I, J + K)\,.$$

La famille $(I, J + K)$ engendre $E \cap \mathcal{S}_2\,(\mathbb{R})$ et est libre (les deux matrices ne sont pas colinéaires) donc $(I, J + K)$ est une base de $E \cap \mathcal{S}_2\,(\mathbb{R})$. Ainsi l'ensemble des matrices symétriques de E est un plan vectoriel. Montrons qu'il est stable par produit. Soit $M = M\,(a, b, b)$ et $M' = (a', b', b')$ deux éléments de $E \cap \mathcal{S}_2\,(\mathbb{R})$. Alors,

$$MM' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bb' & a'b + ab' \\ a'b + ab' & aa' + bb' \end{pmatrix} \in E \cap \mathcal{S}_2\,(\mathbb{R})\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{l'ensemble des matrices symétriques de } E \text{ est un plan vectoriel stable par produit.}}$$

(d) Soit $(b,c) \neq (0,0)$. Posons $M = \alpha I + \beta\,(bJ + cK) = M(\alpha, \beta b, \beta c)$ et $M' = \alpha' I + \beta'\,(bJ + cK) = M(\alpha', \beta' b, \beta' c)$. Dès lors,

$$MM' = \alpha\alpha' I + \left(\alpha\beta' + \alpha'\beta\right)(bJ + cK) + \beta\beta'\,(bJ + cK)^2 .$$

Or

$$(bJ + cK)^2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} = bcI.$$

Ainsi,

$$MM' = \underbrace{(\alpha\alpha' + bc)}_{=\alpha''} I + \underbrace{(\alpha\beta' + \alpha'\beta)}_{=\beta''}(bJ + cK) \in \operatorname{Vect}(I, bJ + cK).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{le sous-espace vectoriel engendré par } I \text{ et } bJ + cK \text{ est stable par produit.}}$$

(e) Soit $P = \operatorname{Vect}(U, V)$ un plan vectoriel de E stable par produit, avec (U, V) deux matrices de E non colinéaires. Il existe $(a, b, c, a', b', c') \in \mathbb{R}^6$ tel que $U = M(a, b, c)$ et $V = M(a', b, c')$. Supposons que $a = a' = 0$. Alors, U et V sont des combinaisons linéaires de J et K, donc (J, K) engendre P ce qui est impossible d'après la question 8.b. Donc $(a, a') \neq (0, 0)$. On peut supposer $a \neq 0$ (le cas $a = 0$ et $a' \neq 0$ se traite de la même façon). Dans ce cas, puisque les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré,

$$\begin{aligned} P = \operatorname{Vect}(U, V) &= \operatorname{Vect}\left(aI + bJ + cK, a'I + b'J + c'K\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(I + \frac{b}{a}J + \frac{c}{a}K, a'I + b'J + c'K\right) && C_1 \leftarrow \frac{1}{a}C_1 \\ &= \operatorname{Vect}\left(I + \frac{b}{a}J + \frac{c}{a}K, \left(b' - \frac{a'}{a}b\right)J + \left(c' - \frac{a'}{a}c\right)K\right) && C_2 \leftarrow C_2 - a'C_1. \end{aligned}$$

Posons $b'' = b' - \frac{a'}{a}b$, $c'' = c' - \frac{a'}{a}c$ et $V'' = b''J + c''K$. Alors on a $V'' \in P$ et donc par stabilité par produit, $(V'')^2 \in E$ i.e.

$$\begin{pmatrix} 0 & b'' \\ c'' & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} b''c'' & 0 \\ 0 & b''c'' \end{pmatrix} = b''c''I \in E.$$

Or $V'' \neq 0$ (car vecteur directeur de P) donc $b''c'' \neq 0$, et donc $I \in E$. Puisque $I \neq O_2$, I est un vecteur directeur du plan P. Soit W un vecteur de P non colinéaire à I :

$$P = \operatorname{Vect}(I, W).$$

Puisque $W \in P \subseteq E$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $W = M(\alpha, \beta, \gamma)$. On obtient alors,

$$P = \operatorname{Vect}(I, \alpha I + \beta J + \gamma K) = \operatorname{Vect}(I, \beta J + \gamma K) \qquad C_2 \leftarrow C_2 - \alpha C_1.$$

Conclusion, les seuls plans vectoriels de E stables par produit sont de la forme

$$\boxed{P = \operatorname{Vect}(I, bJ + cK), \qquad (b, c) \in \mathbb{R}^2.}$$

Deuxième Partie.

L'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire et de son repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ usuels. Soient a et b deux réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. On considère alors la conique / le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ $C_{a,b}$ d'équation : $ax^2 + 2bxy + ay^2 - 4(x + y) = 4$.

1. Dans cette question uniquement $a = 5$ et $b = -3$.

   (a) On pose $O'(1, 1)$, $\overrightarrow{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, $\overrightarrow{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ et $\mathcal{R}' = \left(O', \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}'\right)$. Procédons au changement de repère. Soit M un point du plan, (x, y) ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et (x', y') ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}'$. On a

$$M = O' + x'\overrightarrow{i}' + y'\overrightarrow{j}'$$

et

$$M = O + x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = O' + \overrightarrow{O'O} + x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = O' + (x-1)\overrightarrow{i} + (y-1)\overrightarrow{j}.$$

Donc $\overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{i}' + y'\overrightarrow{j}' = (x-1)\overrightarrow{i} + (y-1)\overrightarrow{j}$. Par la formule de changement de base, on a

$$\begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix} = P_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} + 1 \\ y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} + 1. \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} 5x^2 &= 5\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}} + 1\right)^2 \\ &= 5\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{10x' - 10y'}{\sqrt{2}} + 5 \\ &= \frac{5}{2}(x')^2 - 5x'y' + \frac{5}{2}(y')^2 + \frac{10x' - 10y'}{\sqrt{2}} + 5. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} 5y^2 &= 5\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}} + 1\right)^2 \\ &= 5\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{5x' + 5y'}{\sqrt{2}} + 5 \\ &= \frac{5}{2}(x')^2 + 5x'y' + \frac{5}{2}(y')^2 + \frac{10x' + 10y'}{\sqrt{2}} + 5. \end{aligned}$$

Donc

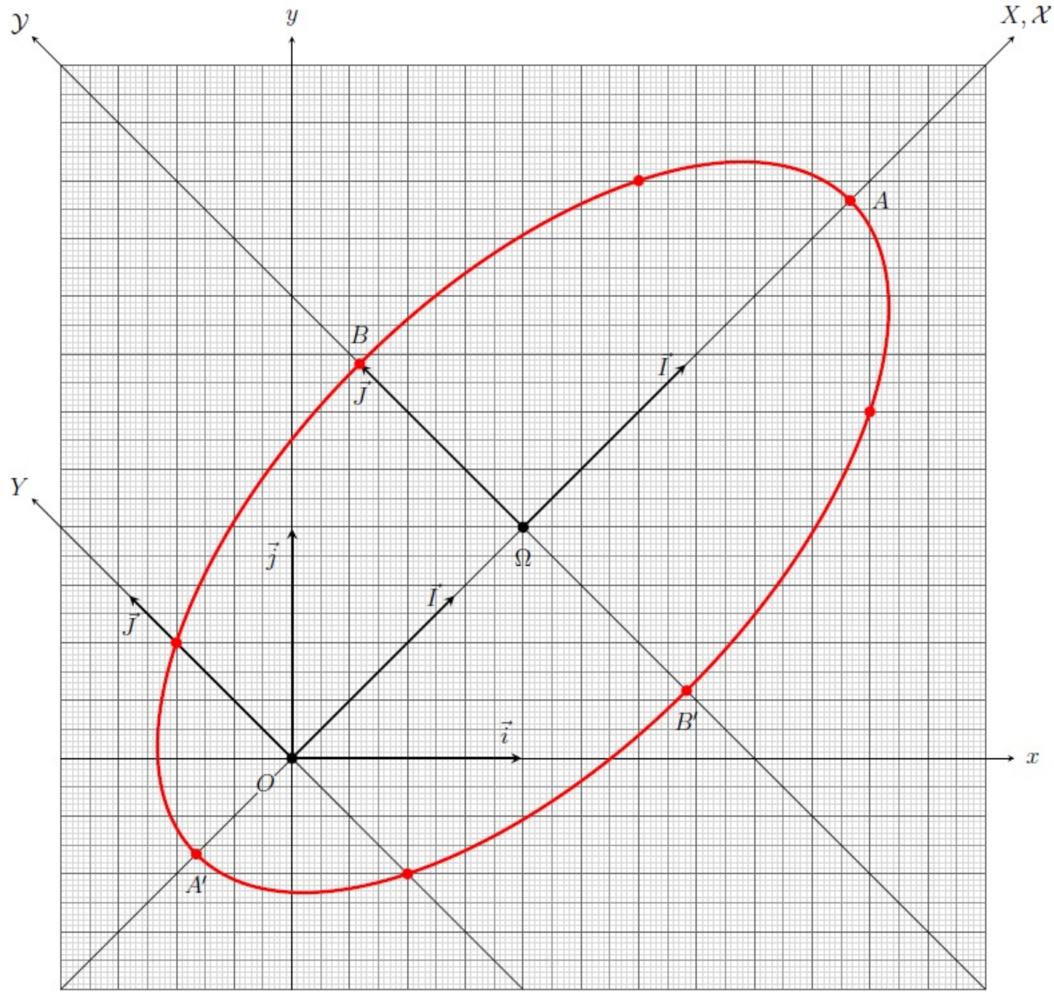
$$5x^2 + 5y^2 = 5(x')^2 + 5(y')^2 + \frac{20x'}{\sqrt{2}} + 10.$$

De plus,

$$\begin{aligned} 6xy &= 6\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}} + 1\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}} + 1\right) \\ &= 6\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + 1\right)^2 - 6\frac{(y')^2}{2} \\ &= 3(x')^2 + \frac{12}{\sqrt{2}}x' + 6 - 3(y')^2. \end{aligned}$$

Donc
$$5x^2-6xy+5y^2=2\left(x'\right)^2+8\left(y'\right)^2+\frac{8x'}{\sqrt{2}}+4$$
D'autre part,
$$4\left(x+y\right)=4\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}+1+\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}+1\right)=\frac{8}{\sqrt{2}}x'+8.$$
En réinjectant, on obtient
$$\begin{aligned} C_{5,-3}: \quad & 5x^2-6xy+5y^2-4\left(x+y\right)=4\\ \Leftrightarrow \quad & 2\left(x'\right)^2+8\left(y'\right)^2+\frac{8x'}{\sqrt{2}}+4-\frac{8}{\sqrt{2}}x'-8=4\\ \Leftrightarrow \quad & 2\left(x'\right)^2+8\left(y'\right)^2=8\\ \Leftrightarrow \quad & \left(x'\right)^2+4\left(y'\right)^2=4. \end{aligned}$$
Conclusion, l'équation de $C_{5,-3}$ dans le repère $\mathcal{R}'$ est :
$$\boxed{C_{5,-3}: \qquad \left(\frac{x'}{2}\right)^2+\left(y'\right)^2=1.}$$

(b) On note que $C_{5,-3}$ a, dans le repère $\mathcal{R}'$, pratiquement une équation d'un cercle. En effet, si l'on opère une dilatation dans l'axe (Ox) de rapport 2 on obtient un cercle. Dans le repère $\mathcal{R}'$ notamment, on observe que la courbe passe par les points suivants :
$$\left(2,0\right), \qquad \left(0,1\right), \qquad \left(-2,0\right), \qquad \left(0,-1\right).$$
On obtient donc la courbe $C_{5,-3}$ en effectuant une dilatation horizontale de rapport 2 du cercle trigonométrique. On obtient ce que l'on appelle *une ellipse*. Or le repère $\mathcal{R}'$ s'obtient en effectuant une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et une translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}\left(1,1\right)$. D'où le dessin suivant :



source : A. Cristofari, https ://cristofari.pagesperso-orange.fr/index.html

(c) On admet que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ est la matrice associée à $C_{a,b}$. On pose

$$\mathrm{Sp}\,(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists X \in \mathbb{R}^2,\ AX = \lambda\, X \right\}.$$

Dès lors, on a les types de coniques suivants :

- Si $0 \in \mathrm{Sp}\,(A)$ alors on dira que $C_{a,b}$ est une parabole.
- Si $\mathrm{Sp}\,(A)$ possède un seul élément ou deux éléments non nuls et de même signe alors on dira que $C_{a,b}$ est une ellipse.
- Si $\mathrm{Sp}\,(A)$ possède deux éléments non nuls et de signes opposés alors on dira que $C_{a,b}$ est une hyperbole.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On a

$$AX = \lambda\, X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} ax + by \\ bx + ay \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\, x \\ \lambda\, y \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (a - \lambda)\, x + by = 0 \\ bx + (a - \lambda)\, y = 0. \end{cases}$$

Premier cas, $b = 0$. Alors

$$AX = \lambda\, X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (a - \lambda)\, x = 0 \\ (a - \lambda)\, y = 0. \end{cases}$$

Donc l'équation $AX = \lambda X$ admet une solution non nulle si et seulement si $\lambda = a$. Donc dans ce cas,

$$\mathrm{Sp}\,(A) = \{a\}\,.$$

Rappelons que $(a, b) \neq (0, 0)$ donc nécessairement ici, $a \neq 0$. Donc pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $C_{a,0}$ est une ellipse.

Second cas, $b \neq 0$. Alors,

$$\begin{array}{lcll}
AX = \lambda X & \Leftrightarrow & \begin{cases} bx + (a-\lambda)\,y = 0 \\ (a-\lambda)\,x + by = 0 \end{cases} & L_1 \leftrightarrow L_2 \\
& \Leftrightarrow & \begin{cases} x + \frac{a-\lambda}{b} y = 0 \\ (a-\lambda)\,x + by = 0 \end{cases} & L_1 \leftarrow \dfrac{1}{b} L_1 \\
& \Leftrightarrow & \begin{cases} x + \frac{a-\lambda}{b} y = 0 \\ \left(b - \frac{(a-\lambda)^2}{b}\right) y = 0 \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - (a-\lambda)\,L_1
\end{array}$$

Si $b - \frac{(a-\lambda)^2}{b} \neq 0$, alors $X = 0_{\mathbb{R}^2}$ est la seule solution de $AX = \lambda X$ et donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}\,(A)$. A contrario si $b - \frac{(a-\lambda)^2}{b} = 0$, alors $AX = \lambda X$ admet une infinité de solutions non nulles. Or

$$\begin{array}{rcl}
b - \dfrac{(a-\lambda)^2}{b} = 0 & \Leftrightarrow & b^2 = (a-\lambda)^2 \\
& \Leftrightarrow & b = a - \lambda \quad \text{OU} \quad b = \lambda - a \\
& \Leftrightarrow & \lambda = a - b \quad \text{OU} \quad \lambda = a + b.
\end{array}$$

Ainsi, si $b \neq 0$,

$$\mathrm{Sp}\,(A) = \{a - b, a + b\}\,.$$

On a

$$\begin{array}{rcl}
(a-b)\,(a+b) > 0 & \Leftrightarrow & a^2 - b^2 > 0 \\
& \Leftrightarrow & a^2 > b^2 \\
& \Leftrightarrow & |a| > |b| \\
& \Leftrightarrow & a > |b| \quad \text{OU} \quad a < -|b|\,.
\end{array}$$

Conclusion, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$\boxed{\begin{array}{l}
\text{si } |a| = |b| \text{ alors } C_{a,b} \text{ est une parabole} \\
\text{si } |a| > |b| \text{ alors } C_{a,b} \text{ est une ellipse} \\
\text{si } |a| < |b| \text{ alors } C_{a,b} \text{ est une hyperbole.}
\end{array}}$$

Notez que le cas $b = 0$ et donc $a \neq 0$ i.e. $|a| > 0$ est bien inclus dans cette conclusion.

On dit qu'une variable aléatoire A définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ suit une loi géométrique de paramètre p, noté $A \sim \mathcal{G}\,(p)$ si et seulement si

$$A\,(\Omega) = \mathbb{N}^*, \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\,(N = k) = (1-p)^{k-1}\,p.$$

On considère désormais la conique $C_{A,B}$ d'équation : $Ax^2 + 2Bxy + Ay^2 - 4\,(x + y) = 4$ où A et B sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètres respectifs $p_A \in \,]0; 1[$ et $p_B \in \,]0; 1[$. On définit la variable aléatoire X par $X\,(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$ et :

- $X = 1$ si $C_{A,B}$ est du type ellipse,

- $X = 0$ si $C_{A,B}$ est du type parabole,
- $X = -1$ si $C_{A,B}$ est du type hyperbole.

2. Détermination de la loi de X.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $\tilde{k} = k - 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} (1-p_A)^{k-1} (1-p_B)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (1-p_A)^{k} (1-p_B)^{k} = \sum_{k=0}^{n-1} [(1-p_A)(1-p_B)]^{k}$$

On reconnaît alors une somme géométrique de raison $(1-p_A)(1-p_B)$. Puisque $0 < p_A < 1$ et $0 < p_B < 1$, on note que $0 < (1-p_A)(1-p_B) < 1$. Dès lors, la série est convergente et

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} (1-p_A)^{k-1} (1-p_B)^{k-1} = \frac{1}{1-(1-p_A)(1-p_B)} = \frac{1}{p_A + p_B - p_A p_B}.}$$

Conclusion,

$$\boxed{S = \frac{1}{p_A + p_B - p_A p_B}.}$$

(b) Puisque A et B suivent deux lois géométriques, $A \geqslant 1$ et $B \geqslant 1$. Donc $A + B \geqslant 2$ et nécessairement,

$$\boxed{P(A + B = 0) = 0.}$$

(c) Par définition, on a $(X = 0) = (C_{A,B}$ est une parabole $)$. Donc par la question précédente,

$$(X = 0) = (|A| = |B|) = (A = B) \qquad \text{car } A \geqslant 0 \text{ et } B \geqslant 0.$$

Puisque $(A = k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(X=0) = P(A=B) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(A = B \mid A = k)\, P(A=k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(B = k \mid A = k)\, P(A=k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(B=k)\, P(A=k) \qquad \text{car } A \text{ et } B \text{ sont indépendantes.} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{P(X=0) = P(A=B) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A=k)\, P(B=k).}$$

(d) Par la question précédente et la définition d'une loi géométrique,

$$P(X=0) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_A (1-p_A)^{k-1} p_B (1-p_B)^{k-1} = p_A p_B \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p_A)^{k-1} (1-p_B)^{k-1}$$

Par la question 2.a on conclut que

$$\boxed{P(X=0) = \frac{p_A p_B}{p_A - p_A p_B + p_B}.}$$

(e) Soit $k \geqslant 1$. On a $(B > k) = \bigsqcup_{i=k+1}^{+\infty} (B = i)$. L'union étant disjointe, on a

$$P(B > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(B = i) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} p_B (1 - p_B)^{i-1} \qquad \text{car } B \sim \mathscr{G}(p_B).$$

On reconnait une somme géométrique de raison $1 - p_B \in \left]-1; 1\right[$,

$$P(B > k) = p_B \sum_{i=k}^{+\infty} (1 - p_B)^i = p_B (1 - p_B)^k \frac{1}{1 - (1 - p_B)} = (1 - p_B)^k.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad P(B > k) = (1 - p_B)^k.}$$

(f) Puisque $((A = k))_{k \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(B > A) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(B > A \mid A = k) P(A = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(B > k \mid A = k) p_A (1 - p_A)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(B > k) p_A (1 - p_A)^{k-1} && \text{car } A \text{ et } B \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - p_B)^k p_A (1 - p_A)^{k-1} && \text{par la question précédente} \\
&= p_A (1 - p_B) \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - p_B)^{k-1} (1 - p_A)^{k-1} \\
&= p_A (1 - p_B) \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - p_B)^k (1 - p_A)^k \\
&= \frac{p_A (1 - p_B)}{1 - (1 - p_B)(1 - p_A)} \\
&= \frac{p_A (1 - p_B)}{p_A + p_B - p_A p_B}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{P(B > A) = \frac{p_A (1 - p_B)}{p_A - p_A p_B + p_B}.}$$

(g) Par la question 1.c on note que $(X = -1) = (|A| < |B|) = (A < B)$ car $A \geqslant 1$ et $B \geqslant 1$. Donc par la question précédente,

$$\boxed{P(X = -1) = \frac{p_A (1 - p_B)}{p_A - p_A p_B + p_B}.}$$

D'autre part $((X = -1), (X = 0), (X = 1))$ forme un système complet d'évènements donc

$$\begin{aligned}
P(X = 1) &= 1 - P(X = -1) - P(X = 0) \\
&= 1 - \frac{p_A (1 - p_B)}{p_A - p_A p_B + p_B} - \frac{p_A p_B}{p_A - p_A p_B + p_B} \\
&= \frac{p_A + p_B - p_A p_B - p_A + p_A p_B - p_A p_B}{p_A + p_B - p_A p_B} \\
&= \frac{p_B - p_A p_B}{p_A + p_B - p_A p_B}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{P(X=1) = \frac{p_B(1-p_A)}{p_A - p_A p_B + p_B}.}$$

Ce qui est logique vu la symétrie des hypothèses sur A et B.

(h) Par définition, $E(X) = -P(X=-1) + P(X=1)$. Donc par la question précédente,

$$E(X) = -\frac{p_A(1-p_B)}{p_A - p_A p_B + p_B} + \frac{p_B(1-p_A)}{p_A - p_A p_B + p_B} = \frac{p_B - p_A}{p_A - p_A p_B + p_B}.$$

Conclusion,

$$\boxed{E(X) = \frac{p_B - p_A}{p_A - p_A p_B + p_B}.}$$

Troisième Partie.

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire et de son repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ usuels. On considère alors la courbe Γ d'équations :

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

On note S la surface de révolution obtenue en faisant tourner la courbe Γ autour de l'axe des ordonnées (Oy).

1. (a) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. Un point M est sur la surface S si on peut l'obtenir à partir d'un point M_0 de la courbe Γ que l'on fait tourner autour de l'axe (Oy). Pour que M soit l'image de M_0 par une rotation autour de l'axe (Oy) il faut que le projeté de M sur (Oy) soit le même que celui de M_0 ce qui correspond à l'équation :

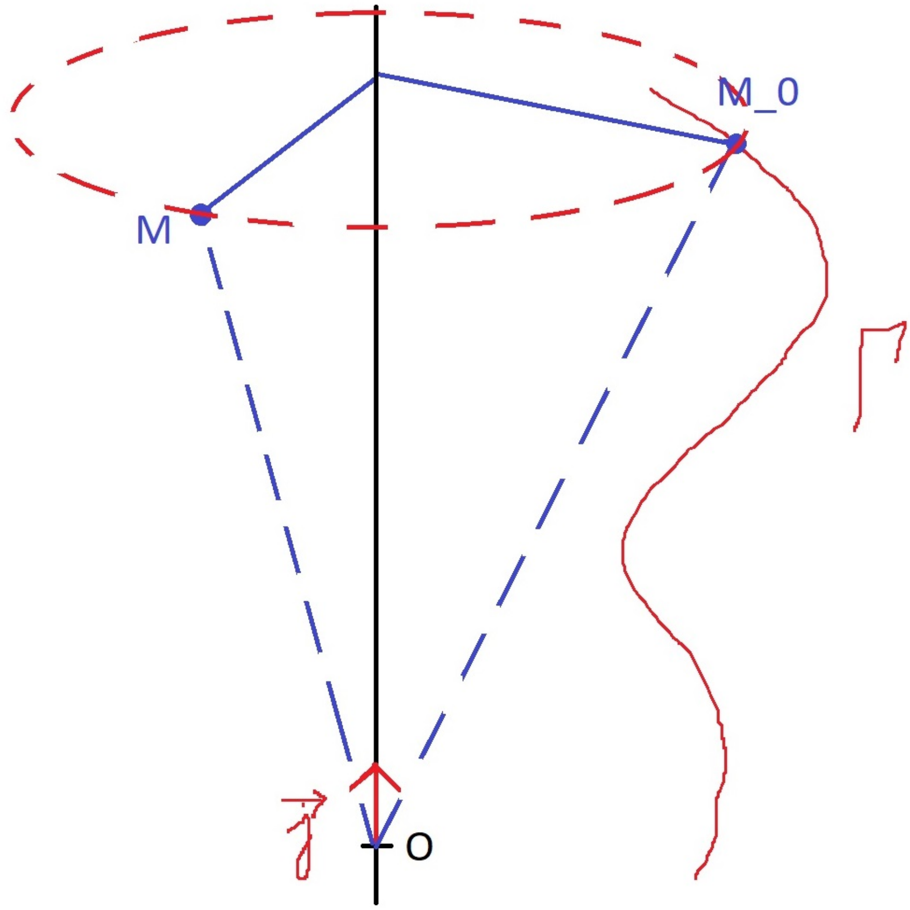
$$\left\langle \overrightarrow{OM}, \frac{\vec{j}}{\|\vec{j}\|} \right\rangle \frac{\vec{j}}{\|\vec{j}\|} = \left\langle \overrightarrow{OM_0}, \frac{\vec{j}}{\|\vec{j}\|} \right\rangle \frac{\vec{j}}{\|\vec{j}\|}.$$

De plus il faut que la distance de M à (Oy) soit égale à la distance de M_0 à (Oy). Par la relation de Chasles, vu que les deux points ont déjà le même projeté, cela correspond aussi à avoir la même distance à l'origine : $OM = OM_0$. On obtient ainsi l'équivalence suivante :

$$M \in S \Leftrightarrow \exists M_0 \in \Gamma, \begin{cases} \left\langle \overrightarrow{OM}, \frac{\vec{j}}{\|\vec{j}\|} \right\rangle \frac{\vec{j}}{\|\vec{j}\|} = \left\langle \overrightarrow{OM_0}, \frac{\vec{j}}{\|\vec{j}\|} \right\rangle \frac{\vec{j}}{\|\vec{j}\|} \\ OM = OM_0 \end{cases}.$$

Puisque $\|j\| = 1$, on peut aussi écrire,

$$\boxed{M \in S \Leftrightarrow \exists M_0 \in \Gamma, \begin{cases} \left\langle \overrightarrow{OM}, \vec{j} \right\rangle \vec{j} = \left\langle \overrightarrow{OM_0}, \vec{j} \right\rangle \vec{j} \\ OM = OM_0 \end{cases}.}$$



Soit $M\,(x, y, z)$ un point de l'espace. On a alors les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
M \in S \quad & \Leftrightarrow \quad \exists\,(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x_0^2 + 4y_0^2 = 4 \\ z_0 = 0 \\ y\,\vec{j} = y_0\,\vec{j} \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists\,(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x_0^2 + 4y_0^2 = 4 \\ y = y_0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x_0^2 + 4y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y^2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x_0^2 + 4y^2 = 4 \\ x_0^2 = x^2 + z^2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x^2 + z^2 + 4y^2 = 4 \\ x_0^2 = x^2 + z^2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad x^2 + 4y^2 + z^2 = 4.
\end{aligned}
$$

Conclusion, une équation cartésienne de S est

$$\boxed{S: \qquad x^2+4y^2+z^2=4.}$$

(b) Soit $M(x,y,z)\in S$. On a

$$\begin{aligned}
M \text{ est régulier} \quad &\Leftrightarrow \quad \nabla f(x,y,z)\neq \vec{0}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix}2x\\8y\\2z\end{bmatrix}=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow \quad (x,y,z)\neq(0,0,0).
\end{aligned}$$

Or $(0,0,0)\notin S$. Conclusion,

$$\boxed{\text{tous les points de } S \text{ sont réguliers.}}$$

(c) Soit $\mathcal{T}$ le plan tangent à S au point A de coordonnées $\left(\sqrt{2},0,-\sqrt{2}\right)$. Soit $M(x,y,z)$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M\in\mathcal{T} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM}\perp\nabla f\left(\sqrt{2},0,-\sqrt{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \left\langle\overrightarrow{AM},\nabla f\left(\sqrt{2},0,-\sqrt{2}\right)\right\rangle=0\\
&\Leftrightarrow \quad \left\langle\begin{bmatrix}x-\sqrt{2}\\y\\z+\sqrt{2}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\0\\-2\sqrt{2}\end{bmatrix}\right\rangle=0\\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}x-2-2\sqrt{2}z-4=0\\
&\Leftrightarrow \quad x-2z=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'équation du plan tangent à S au point A de coordonnées $\left(\sqrt{2},0,-\sqrt{2}\right)$ est

$$\boxed{\mathcal{T}: \qquad x-2z=3\sqrt{2}.}$$

2. On note $\vec{u}$ le vecteur $\vec{i}+\vec{k}$. On considère Λ_1 l'ensemble des points M de S tels que la normal au plan tangent à S en M est orthogonale à $\vec{u}$.

(a) Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. On a

$$\begin{aligned}
M\in\Lambda_1 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases}M\in S\\ \nabla f(x,y,z)\perp\vec{u}\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x^2+4y^2+z^2=4\\ \langle\nabla f(x,y,z),\vec{u}\rangle=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x^2+4y^2+z^2=4\\ \left\langle\begin{bmatrix}2x\\8y\\2z\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\rangle=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x^2+4y^2+z^2=4\\ 2x+2z=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x^2+4y^2+z^2=4\\ x+z=0\end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion, les équations cartésiennes de Λ_1 sont

$$\boxed{\Lambda_1 : \quad \begin{cases} x^2+4y^2+z^2=4 \\ x+z=0. \end{cases}}$$

(b) Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. Le point M est sur Σ_1 si et seulement s'il appartient à une droite passant par un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de Λ_1 et dirigée par $\vec{u}$. Autrement dit,

$$\begin{aligned}
M\in\Sigma_1 \quad & \Leftrightarrow \quad \exists M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Lambda_1,\ \exists t\in\mathbb{R},\quad \overrightarrow{M_0M}=t\vec{u} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists (x_0,y_0,z_0,t)\in\mathbb{R}^4,\quad \begin{cases} x_0^2+4y_0^2+z_0^2=4 \\ x_0+z_0=0 \\ x-x_0=t \\ y-y_0=0 \\ z-z_0=t \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists (x_0,y_0,z_0,t)\in\mathbb{R}^4,\quad \begin{cases} x_0^2+4y_0^2+z_0^2=4 \\ x_0+z_0=0 \\ x_0=x-t \\ y_0=y \\ z_0=z-t \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists t\in\mathbb{R},\quad \begin{cases} (x-t)^2+4y^2+(z-t)^2=4 \\ x-t+z-t=0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists t\in\mathbb{R},\quad \begin{cases} (x-t)^2+4y^2+(z-t)^2=4 \\ t=\frac{x+z}{2} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{x+z}{2}\right)^2+4y^2+\left(z-\frac{x+z}{2}\right)^2=4 \\
& \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x-z}{2}\right)^2+4y^2+\left(-\frac{x-z}{2}\right)^2=4 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(x-z)^2+4y^2=4 \\
& \Leftrightarrow \quad x^2-2xz+z^2+8y^2=8.
\end{aligned}$$

Conclusion, une équation cartésienne de Σ_1 est donnée par

$$\boxed{\Sigma_1 : \quad x^2+8y^2+z^2-2xz=8.}$$

(c) Soit D_1 une droite passant par un point de Λ_1 et dirigées par $\vec{u}$. Soient $M_1(x_1,y_1,z_1)$ et $M_2(x_2,y_2,z_2)$ deux points de D_1. On note que puisque Σ_1 est l'union des droites passant par un point de Λ_1 et dirigées par $\vec{u}$, alors nécessairement $D_1\subseteq\Sigma_1$. Donc $M_1\in\Sigma_1$. Posons $g:(x,y,z)\to x^2+8y^2+z^2-2xz-8$. On a

$$\nabla g(x,y,z)=\begin{bmatrix} 2x-2z \\ 16y \\ 2z-2x \end{bmatrix}.$$

On observe que

$$\nabla g(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x=z \\ y=0. \end{cases}$$

Or si $M(x,0,x)\notin\Sigma_1$ car $g(x,0,x)=x^2+0+x^2-2x^2=0\neq 8$. Donc tous les points de Σ_1 et donc de D_1 sont réguliers.

Notons $\mathcal{T}_1$ le plan tangent à Σ_1 en M_1. Soit $M\left(x,y,z\right)$. On a

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{T}_1 \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_1M} \perp \nabla g\left(x_1,y_1,z_1\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \left(x-x_1\right)\left(2x_1-2z_1\right)+\left(y-y_1\right)16y_1+\left(z-z_1\right)\left(2z_1-2x_1\right)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \left(2x_1-2z_1\right)x+16y_1y+\left(2z_1-2x_1\right)z-2x_1^2+2x_1z_1-16y_1^2-2z_1^2+2x_1z_1=0\\
&\Leftrightarrow \quad \left(2x_1-2z_1\right)x+16y_1y+\left(2z_1-2x_1\right)z-2\left(x_1^2+8y_1^2+z_1^2-2x_1z_1\right)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \left(2x_1-2z_1\right)x+16y_1y+\left(2z_1-2x_1\right)z-16=0 \qquad \text{car } M_1\in\Sigma_1.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{T}_1 : \quad \left(2x_1-2z_1\right)x+16y_1y+\left(2z_1-2x_1\right)z=16.$$

De même en notant $\mathcal{T}_2$ le plan tangent à Σ_1 en M_2,

$$\mathcal{T}_1 : \quad \left(2x_2-2z_2\right)x+16y_2y+\left(2z_2-2x_2\right)z=16.$$

Puisque M_2 est sur D_1, il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $M_2=M_1+t\overrightarrow{u}$. Donc

$$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+t\\y_1\\z_1+t\end{bmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_2 : \quad &\left(2x_1+2t-2z_1-2t\right)x+16y_1y+\left(2z_1+2t-2x_1-2t\right)z=16\\
\Leftrightarrow \quad &\left(2x_1-2z_1\right)x+16y_1y+\left(2z_1-2x_1\right)z=16.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ ont la même équation cartésienne et sont donc égaux. Conclusion,

$$\boxed{\text{le plan tangent à } \Sigma_1 \text{ est le même en tout point régulier de } D_1.}$$

Méthode 2. On pouvait aussi observer directement que puisque $D_1\subseteq\Sigma_1$, le plan tangent à Σ_1 en M_1 contient nécessairement D_1 et donc M_2. Donc $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ ont au moins un point commun (et même toute la droite D_1 en commun). Montrons qu'ils ont un vecteur normal commun. Puisqu'il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $M_2=M_1+t\overrightarrow{u}$, on a

$$\nabla g\left(x_2,y_2,z_2\right)=\begin{bmatrix}2x_2-2z_2\\16y_2\\2z_2-2x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1+2t-2z_1-2t\\16y_1\\2z_1+2t-2x_1-2t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1-2z_1\\16y_1\\2z_1-2x_1\end{bmatrix}=\nabla g\left(x_1,y_1,z_1\right)$$

Donc ces deux plans ont un point commun et un vecteur normal commun et donc sont confondus.

$$\boxed{\text{le plan tangent à } \Sigma_1 \text{ est le même en tout point régulier de } D_1.}$$

3. On note Ω le point de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(0,0,4)$. On considère Λ_2 l'ensemble des points M de S tels que la normale au plan tangente à S en M soit orthogonale à la droite (ΩM).

(a) Soit $M\,(x,y,z)$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in \Lambda_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} M \in S \\ \overrightarrow{\Omega\, M} \perp \nabla f\,(x,y,z) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+4y^2+z^2=4 \\ \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \\ z-4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2x \\ 8y \\ 2z \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+4y^2+z^2=4 \\ 2x^2+8y^2+2z^2-8z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+4y^2+z^2=4 \\ x^2+4y^2+z^2-4z=0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+4y^2+z^2=4 \\ -4z=-4 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+4y^2=3 \\ z=1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\Lambda_2 : \quad \begin{cases} x^2+4y^2=3 \\ z=1. \end{cases}}$$

(b) On note Σ_2 la surface [:] engendrée par les / qui est l'union des droites $(\Omega\, M)$ où M parcourt Λ_2.

Soit N un point de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z). On a

$$
\begin{aligned}
N \in \Sigma_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists M\left(x_M, y_M, z_M\right) \in \Lambda_2,\ t \in \mathbb{R}, \qquad N = \Omega + t\overrightarrow{\Omega M} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\left(x_M, y_M, z_M, t\right) \in \mathbb{R}^4, \qquad \begin{cases} x_M^2 + 4y_M^2 = 3 \\ z_M = 1 \\ x = tx_M \\ y = ty_M \\ z = 4 + t\left(z_M - 4\right) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\left(x_M, y_M, t\right) \in \mathbb{R}^4, \qquad \begin{cases} x_M^2 + 4y_M^2 = 3 \\ x = tx_M \\ y = ty_M \\ z = 4 - 3t \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\left(x_M, y_M, t\right) \in \mathbb{R}^4, \qquad \begin{cases} x_M^2 + 4y_M^2 = 3 \\ x = tx_M \\ y = ty_M \\ t = \frac{4-z}{3} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\left(x_M, y_M\right) \in \mathbb{R}^4, \qquad \begin{cases} x_M^2 + 4y_M^2 = 3 \\ x = \frac{4-z}{3} x_M \\ y = \frac{4-z}{3} y_M \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \left[z = 4 \ \text{ ET } \ \exists\left(x_M, y_M\right) \in \mathbb{R}^4, \qquad \begin{cases} x_M^2 + 4y_M^2 = 3 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \right] \\
&\qquad\qquad \text{OU} \ \left[z \neq 4 \ \text{ ET } \ \exists\left(x_M, y_M\right) \in \mathbb{R}^4, \qquad \begin{cases} x_M^2 + 4y_M^2 = 3 \\ x_M = \frac{3x}{4-z} \\ y_M = \frac{3y}{4-z} \end{cases} \right] \\
&\Leftrightarrow \quad N = \Omega \ \text{ OU } \ \left[z \neq 4 \ \text{ ET } \ \exists\left(x_M, y_M\right) \in \mathbb{R}^4, \qquad \begin{cases} \frac{9x^2}{(4-z)^2} + 4\frac{9y^2}{(4-z)^2} = 3 \\ x_M = \frac{3x}{4-z} \\ y = \frac{4-z}{3} y_M = \frac{3y}{4-z} \end{cases} \right] \\
&\Leftrightarrow \quad N = \Omega \ \text{ OU } \ \left[z \neq 4 \ \text{ ET } \ \frac{9x^2}{(4-z)^2} + 4\frac{9y^2}{(4-z)^2} = 3 \right] \\
&\Leftrightarrow \quad N = \Omega \ \text{ OU } \ \left[z \neq 4 \ \text{ ET } \ \frac{3x^2}{(4-z)^2} + \frac{12y^2}{(4-z)^2} = 1 \right].
\end{aligned}
$$

Conclusion,

$$
\boxed{N \in \Sigma_2 \quad \Leftrightarrow \quad N = \Omega \ \text{ OU } \ \left[z \neq 4 \ \text{ ET } \ \frac{3x^2}{(4-z)^2} + \frac{12y^2}{(4-z)^2} = 1 \right].}
$$

(c) Par la question précédente, en multipliant par $(4-z)^2$ (qui est non nul),

$$
N \in \Sigma_2 \quad \Leftrightarrow \quad N = \Omega \ \text{ OU } \ \left[z \neq 4 \ \text{ ET } \ 3x^2 + 12y^2 = (4-z)^2 \right].
$$

On note que si $N = \Omega$, alors, $x = 0$, $y = 0$ et $z = 4$ et donc $3x^2 + 12y^2 = (4-z)^2$. Réciproquement, si $z = 4$ et $3x^2 + 12y^2 = (4-z)^2$ alors, $3x^2 + 12y^2 = 0$ et donc par positivité des termes,

$x = y == 0$ et $N = \Omega$. D'où

$$N = \Omega \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[z = 4 \ \text{ ET } \ 3x^2 + 12y^2 = (4-z)^2\right].$$

Donc

$$\begin{aligned} N \in \Sigma_2 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \left[z = 4 \ \text{ ET } \ 3x^2 + 12y^2 = (4-z)^2\right] \ \text{ OU } \ \left[z \neq 4 \ \text{ ET } \ 3x^2 + 12y^2 = (4-z)^2\right] \\ &\Leftrightarrow \qquad 3x^2 + 12y^2 = (4-z)^2 . \end{aligned}$$

Conclusion, une équation cartésienne de Σ_2 est

$$\boxed{\Sigma_2 : \qquad 3x^2 + 12y^2 = (4-z)^2 .}$$

(d) Soit $h : (x, y, z) \mapsto 3x^2 + 12y^2 - (4-z)^2$. On a

$$\nabla h(x, y, z) = \begin{bmatrix} 6x \\ 24y \\ 2(4-z) \end{bmatrix}.$$

Soit $M(x, y, z) \in \Sigma_2$. On a donc

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \ \text{ non régulier} \qquad &\Leftrightarrow \qquad \nabla h(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = y = 0 \\ z = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \qquad M = \Omega . \end{aligned}$$

Puisque $\Omega \in \Sigma_2$, on conclut que

$$\boxed{\Omega \text{ est le seul point non régulier de } \Sigma_2.}$$

(e) Soit D_2 une droite (ΩM) avec $M \in \Lambda_2$. Supposons $M \neq \Omega$ et notons (x_M, y_M, z_M) les coordonnées de M. Soit $N \in D_2$, $N \neq \Omega$. On sait que $D_2 \subseteq \Sigma_2$. Notons $\mathcal{T}_M$ le plan tangent à Σ_2 en M et $\mathcal{T}_N$ celui en N. Soit $P(x, y, z)$ un point de l'espace. On a

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{T}_M \qquad &\Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{MP} \perp \nabla h(x_M, y_M, z_M) \\ &\Leftrightarrow \qquad \left\langle \begin{bmatrix} x_p - x_M \\ y_P - y_M \\ z_P - z_M \end{bmatrix}, 2 \begin{bmatrix} 3x_M \\ 12y_M \\ 4 - z_M \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad 3x_M(x_p - x_M) + 12y_M(y_P - y_M) + (4 - z_M)(z_P - z_M) = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad 3x_M x_P + 12y_M y_P + (4 - z_M) z_P - 3x_M^2 - 12y_M^2 - (4 - z_M) z_M = 0. \end{aligned}$$

Or $M \in \Sigma_2$ donc $3x_M^2 + 12y_M^2 = (4 - z_M)^2$. D'où

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{T}_M \qquad &\Leftrightarrow \qquad 3x_M x_P + 12y_M y_P + (4 - z_M) z_P - (4 - z_M)^2 - (4 - z_M) z_M = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad 3x_M x_P + 12y_M y_P + (4 - z_M) z_P = (4 - z_M)(4 - z_M + z_M) = 4(4 - z_M). \end{aligned}$$

De même,

$$\mathcal{T}_N : \qquad 3x_N x_P + 12y_N y_P + (4 - z_N) z_P = 4(4 - z_N).$$

Or $N \in (\Omega M)$ donc il existe $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $N = \Omega + t\overrightarrow{\Omega M}$. Ainsi,

$$\begin{cases} x_N = t x_M \\ y_N = t y_M \\ z_N = 4 + t(z_M - 4). \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_N : \quad & 3tx_Mx_P + 12ty_My_P + t\left(z_M - 4\right)z_P = 4t\left(z_M - 4\right) \\ \Leftrightarrow \quad & 3x_Mx_P + 12y_My_P + \left(z_M - 4\right)z_P = 4\left(z_M - 4\right). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{T}_N = \mathcal{T}_M$. Conclusion,

$$\boxed{\text{le plan tangent à } \Sigma_2 \text{ est le même en tout point régulier de } D_2.}$$

Méthode 2. Puisque $D_2 \subseteq \Sigma_2$ et $M \in D_2$ alors nécessairement $\mathcal{T}_M$ contient D_2. De même $\mathcal{T}_N$ contient D_2 et donc $\mathcal{T}_M$ et $\mathcal{T}_M$ ont un point commun (et même une droite commune). De plus,

$$\nabla h\left(x_N, y_N, z_N\right) = 2\begin{bmatrix} 3x_N \\ 12y_N \\ 4 - z_N \end{bmatrix} = 2t\begin{bmatrix} 3x_M \\ 12y_M \\ 4 - z_M \end{bmatrix} = 2t\nabla h\left(x_M, y_M, z_M\right)$$

Donc les vecteurs normaux $\nabla h\left(x_N, y_N, z_N\right)$ et $\nabla h\left(x_M, y_M, z_M\right)$ sont colinéaires et donc normaux à $\mathcal{T}_M$ et $\mathcal{T}_N$. Conclusion, $\mathcal{T}_N = \mathcal{T}_M$:

$$\boxed{\text{le plan tangent à } \Sigma_2 \text{ est le même en tout point régulier de } D_2.}$$

Fin de l'épreuve