Banque PT - Maths C - 2021
Version pour juniors

Les parties en bleu ont été modifiées par rapport sujet initial.

Préambule

1. Donner les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$:
$$y' + 2xy = 0$$
Dans ce qui suit, on désignera par f la solution de $(\mathcal{E})$ prenant la valeur 1 en zéro.
Il est demandé de donner explicitement f.

2. Déterminer la dérivée seconde f'' et la dérivée troisième f''' de f.

3. Déterminer, après avoir justifié leur existence :
$$\max_{t\in[0;1]} |f(t)| \quad , \quad \max_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)| \quad , \quad \max_{t\in[0;1]} |f'(t)|$$

4. (a) Enoncer le théorème des accroissements finis.
   (b) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un réel η strictement positif, que l'on explicitera, tel que :
$$\forall\,(x,y) \in [0;1]^2 \;:\; |x-y| \leqslant \eta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon\,.$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f s'exprime à l'aide de f et d'une fonction polynomiale H_n, dont on précisera la parité, et le degré. On désignera par $a\,(H_n)$ le coefficient dominant de H_n.

6. Donner, pour tout entier naturel n, une relation entre $a\,(H_n)$ et $a\,(H_{n+1})$, puis exprimer $a\,(H_n)$ en fonction de l'entier n.

Partie I

Pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on définit les intégrales dites « impropres », lorsqu'elles existent, par
$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{B\to-\infty}\int_B^0 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout entier naturel n, on pose :
$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \quad , \quad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

On donne :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

1. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que si la fonction g est paire, alors $\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(k)$ converge si et seulement si $\sum_{k\in\mathbb{N}} g(k)$ converge.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} k^n\,\mathrm{e}^{-k^2}$ et $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^n\,\mathrm{e}^{-k^2}$ convergent.

On admet dans la suite que pour tout entier naturel n, I_n et J_n existent et sont finies.

3. Donner, pour tout entier naturel pair n, une relation entre I_n et J_n. Que vaut J_n si l'entier n est impair ?

4. Calculer I_1.

5. Déterminer, pour tout entier naturel n, une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

6. Soit k un entier naturel. Montrer que :

$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et exprimer, en fonction de k : I_{2k+1}.

7. (a) Montrer que pour toute fonction polynomiale P, la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} P(k)\,\mathrm{e}^{-k^2}$ converge. On admet dans la suite que de même $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ existe et est finie.

(b) Soit Q une fonction polynomiale telle que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} Q^2(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.
Montrer que la fonction Q est identiquement nulle.

(c) Montrer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \langle P,Q\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \end{array}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(d) Justifier : $\langle H_0, H_1\rangle = 0$.
On rappelle que la suite de polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a été introduite dans le Préambule.
On admettra, pour la suite du problème que :

$$\forall\,(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : \quad \langle H_{2p}, H_{2q+1}\rangle = 0$$

(e) On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire : pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$, $\|P\| = \sqrt{\langle P,P\rangle}$. Calculer $e_0 = \frac{H_0}{\|H_0\|}$, $v_1 = H_1 - \langle H_1, e_0\rangle\, e_0$, $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, $v_2 = H_2 - \langle H_2, e_1\rangle\, e_1 - \langle H_2, e_0\rangle\, e_0$ et $e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$. Que dire de la famille (e_0, e_1, e_2) ?

Partie II

Pour tout réel x, on pose :

$$F(x) = x\int_1^2 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Etudier la parité de F.

2. Montrer que, pour tout réel x :

$$F(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

3. Etudier la continuité et la dérivabilité de F.

4. Que vaut :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)?$$

5. Etudier la convergence de la série de terme général $F(2^n)$.
6. (a) Donner l'expression de la dérivée de F.
   (b) Résoudre : $F'(x) = 0$.
   (c) Etudier les variations de la fonction F. Il est demandé de donner le tableau de variations de la fonction F.
7. Montrer que, pour tout réel strictement positif x :
$$x\,\mathrm{e}^{-4x^2} \leqslant F(x) \leqslant x\,\mathrm{e}^{-x^2}$$
8. Tracer l'allure du graphe de la fonction F.
9. (a) Justifier le fait que la fonction F admette des primitives sur $\mathbb{R}$. On désignera par G la primitive de F s'annulant en 0.
   (b) On introduit :
$$\ell_G = \lim_{x \to +\infty} G(x)$$
   Justifier l'existence de ℓ_G dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
   (c) Montrer que : $\frac{1}{8} \leqslant \ell_G \leqslant \frac{1}{2}$.
10. (a) Rappeler le développement limité de la fonction exponentielle à l'ordre n en 0.
    (b) En déduire un développement limité de F à l'ordre $2n+1$ en 0. On note $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ la série numérique associée à la partie régulière de ce développement limité. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Partie III

Dans ce qui suit, f est la fonction introduite dans le Préambule.
Pour tout entier naturel non nul n, tout entier naturel $k \leqslant n$ et tout réel x, on pose :
$$R_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad , \quad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) R_{n,k}(x)$$

1. Soit x un réel, et n un entier naturel. Donner le plus simplement possible, la valeur de : $\sum_{k=0}^{n} k R_{n,k}(x)$.
2. Soit p un réel tel que $0 < p < 1$. On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Quelle est la loi de la variable aléatoire S_n ? On donnera la valeur de son espérance $\mathbb{E}[S_n]$.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :
$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(p)$$
   (b) Soit ε un réel strictement positif. Montrer que pour tout $\eta > 0$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$:
$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \eta\right] \leqslant \varepsilon$$
   (c) Soit $\eta > 0$. Que peut-on dire de l'ensemble :
$$\left\{k \in \mathbb{N}, \left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant \eta\right\} \cup \left\{k \in \mathbb{N}, \left|\frac{k}{n} - p\right| > \eta\right\} \ ?$$
   (d) En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$:
$$|f(p) - B_n(f)(p)| \leqslant 3\,\varepsilon$$
   où on rappelle que la fonction f a été introduite dans le Préambule. Que peut-on en déduire ?