Corrigé - Banque PT - Maths C - 2021
Version pour juniors

Les réponses en bleu sont les réponses des questions ajoutées ou modifiées par rapport sujet initial.

Préambule

1. La fonction $x \mapsto 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$ dont l'une est donnée par A : $x \mapsto x^2$. Conclusion, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathcal{E}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{-x^2} \end{array} \middle| \; C \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x^2} \end{array} \right).}$$

En particulier, pour $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a

$$\begin{cases} f \in \mathscr{S}_{\mathcal{E}} \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = C\,\mathrm{e}^{-x^2} \\ f(0) = C = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Conclusion, l'unique fonction f solution de $(\mathcal{E})$ prenant la valeur 1 en zéro (rappelons au passage que son existence et son unicité étaient garanties en amont par le théorème de Cauchy) est la fonction

$$\boxed{f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x^2} \end{array}.}$$

2. La fonction $x \mapsto -x^2$ et la fonction exponentielle sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc f est $\mathscr{C}^\infty$ et donc notamment deux et trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x\,\mathrm{e}^{-x^2} \\ f''(x) &= \left(-2 + 4x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2} \\ f'''(x) &= \left(8x - 2x\left(-2 + 4x^2\right)\right)\mathrm{e}^{-x^2} = \left(12x - 8x^3\right)\mathrm{e}^{-x^2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = \left(-2 + 4x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2} \qquad \text{et} \qquad f'''(x) = \left(12x - 8x^3\right)\mathrm{e}^{-x^2}.}$$

3. La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc notamment f et f' sont continues sur le segment $[0;1]$ et donc il en va de même pour $|f|$ et $|f'|$ aussi. Or d'après le théorème des bornes atteintes, toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Ainsi,

$$\boxed{\max_{t \in [0;1]} |f(t)| \qquad \text{et} \qquad \max_{t \in [0;1]} |f'(t)| \ \text{existent.}}$$

Pour le troisième maximum, il nous étudier un peu davantage la fonction. Pour $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f''(x) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(-2 + 4x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2} \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 \geqslant \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[. \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f' est croissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[$ et décroissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. De plus, par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} -2x\,\mathrm{e}^{-x^2} = 0.$$

On a également $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-1/2} = -\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}$. De plus, on note que la fonction f' est impaire donc $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$.

On obtient alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
f'	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}$	$\nearrow$	0

D'une part, on en déduit le tableau suivant

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$\lvert f'\rvert$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}$	$\searrow$		$\searrow$	0

La fonction f' est admet donc bien un maximum sur $\mathbb{R}$ ainsi que sur $[0;1]$ donné par $\max\limits_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)| = \max\limits_{t\in[0;1]} |f'(t)| = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}$. De plus, du tableau précédent de f', on obtient également

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

En particulier, $\max\limits_{t\in[0;1]} |f(t)| = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\max_{t\in[0;1]} |f(t)| = 1 \qquad \text{et} \qquad \max_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)| = \max_{t\in[0;1]} |f'(t)| = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}.}$$

4. (a) Alors ça c'est sympa ! Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f une fonction de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Alors,

$$\exists c \in \,]a;b[\,, \qquad f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)\,.$$

(b) Soit ε un réel strictement positif. Soit $(x,y) \in [0;1]^2$, $x \neq y$. La fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ donc notamment f est continue sur $[x;y]$ (ou $[y;x]$) dérivable sur $]x;y[$ (ou $]y;x[$). Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists c_{x,y} \in \,]x;y[\ \text{ (ou }]y;x[) \qquad f(x) - f(y) = f'(c_{x,y})(x-y)\,.$$

Or par la question 3. pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f'(t)| \leqslant \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}$. Dès lors,

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c_{x,y})|\,|x-y| \leqslant \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}\,|x-y|\,.$$

On note que l'inégalité reste vraie pour $x = y$. Posons $\eta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}} > 0$. Alors si $|x-y| \leqslant \eta$, on obtient bien que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}} = \varepsilon\,.$$

Conclusion, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}} > 0$ tel que

$$\boxed{\forall (x,y) \in [0;1]^2\ :\ |x-y| \leqslant \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon\,.}$$

A ne pas confondre avec la définition de la continuité : ici le η est indépendant de x. Une fonction f est continue sur $[0;1]$ si elle est continue pour tout $x \in [0;1]$ i.e.

$$\forall (\varepsilon, x) \in \mathbb{R}_+^* \times [0;1]\,,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in [0;1]\,, \qquad |x-y| \leqslant \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon\,.$$

*Dans le cas précédent, le η est définie avant le x, il est donc uniforme en x et on dit que la fonction f est **uniformément** continue, qu'il ne faut pas confondre avec la continuité simple. Nous avons donc démontré que si la dérivée est bornée sur un segment (i.e. la fonction f est lipschitzienne) alors la fonction f est notamment uniformément continue. Vous serez heureux d'apprendre qu'il existe un théorème plus général qui dit que toute fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment (théorème de Heine) mais ce résultat est faux si l'on enlève l'hypothèse segment.*

5. Un petit peu délicate à rédiger. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathscr{P}(n)$ la proposition

$$\text{« } \exists H_n \text{ une fonction polynomiale, } f^{(n)} = H_n \cdot f,\ H_n \text{ de même parité que } n \text{ et } \deg(H_n) = n \text{ ».}$$

On note que $f^{(n)}$ n'a pas de problème de définition car f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Initialisation. Si $n = 0$. Alors, en posant $H_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$. Alors H_0 est bien une fonction polynomiale, paire de degré 0 et telle que $f^{(0)} = f = 1 \times f$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. Par hypothèse de récurrence, il existe H_n une fonction polynomiale de même parité que n, de degré n et telle que $f^{(n)} = H_n \cdot f$. Puisque f est $\mathscr{C}^{n+1}$ et H_n polynomiale, alors $f^{(n)}$, H_n et f sont dérivables et

$$f^{(n+1)} = H_n' f + H_n f'.$$

Or par la question 2. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n+1)}(x) = \left(H_n'(x) - 2xH_n(x)\right) f(x).$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_{n+1}(x) = H_n'(x) - 2xH_n(x)$. Comme dérivée, produit et différence de fonction polynomiale, la fonction H_{n+1} est bien une fonction polynomiale.

Premier cas, si n est pair. Alors, H_n est paire et donc ne possède que des monômes de degré pair. Donc en dérivant, H_n' ne contient que des monômes de degré impair et donc H_n' est impaire. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H_{n+1}(-x) = H_n'(-x) + 2xH_n(-x) \underset{H_n \text{ pair}}{=} -H_n'(x) + 2xH_n(x) = -H_{n+1}(x).$$

Donc H_{n+1} est impair.

Second cas, si n est impair. Alors de même, H_n' est pair et de même $x \mapsto xH_n(x)$ aussi. Donc H_{n+1} est pair.

Dans tous les cas, H_{n+1} est de même parité que H_n.

Enfin, on a $\deg(H_n') \leqslant \deg(H_n) - 1 = n-1$ (avec inégalité stricte si $n=0$). Tandis que

$$\deg(x \mapsto 2xH_n(x)) = \deg(x \mapsto x) + \deg(H_n) = n+1.$$

Donc $\deg(H_n') < \deg(x \mapsto 2xH_n(x))$. Ainsi,

$$\deg(H_{n+1}) = \deg(x \mapsto 2xH_n(x)) = n+1.$$

Finalement, on a bien obtenu $\mathscr{P}(n+1)$.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie et on obtient que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists H_n \text{ une fonction polynomiale, } f^{(n)} = H_n \cdot f,\ H_n \text{ de même parité que } n \text{ et } \deg(H_n) = n.}$$

On désignera par $a(H_n)$ le coefficient dominant de H_n.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_{n+1}(x) = H_n'(x) - 2xH_n(x)$ et $\deg(H_n') \leqslant n-1$ et $\deg(2xH_n(x)) = n+1$. Donc on en déduit que

$$a(H_{n+1}) = a(-2xH_n(x)) = -2a(H_n).$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a(H_{n+1}) = -2a(H_n).}$$

Donc $(a(H_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite géométrique de raison -2. De plus, par définition de H_0, $a(H_0) = 1$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a(H_n) = (-2)^n a(H_0) = (-2)^n.}$$

Partie I

Pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on définit les intégrales dites « impropres », lorsqu'elles existent, par

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{B\to-\infty} \int_B^0 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n \,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \quad , \quad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

On donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

1. Soient $(q,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-q}^{p} g(k) &= \sum_{k=-q}^{-1} g(k) + \sum_{k=0}^{p} g(k) && \text{par la relation de Chasles} \\
&= \sum_{k=1}^{q} g(-k) + \sum_{k=0}^{p} g(k) && \text{par l'inversion d'indice } \tilde{k} = -k \\
&= \sum_{k=1}^{q} g(k) + \sum_{k=0}^{p} g(k) && \text{car } g \text{ est paire.}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(k) \text{ converge si et seulement si } \sum_{k\in\mathbb{N}} g(k) \text{ converge.}}$$

De plus, on a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k) = \lim_{p,q\to+\infty} g(k) = \lim_{p,q\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{q} g(k) + \sum_{k=0}^{p} g(k)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} g(k) + \sum_{k=0}^{+\infty} g(k) = g(0) + 2\sum_{k=1}^{+\infty} g(k).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance comparée, on a

$$k^{n+2}\,\mathrm{e}^{-k^2} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $k \geqslant k_0$,

$$0 \leqslant k^n\,\mathrm{e}^{-k^2} \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

Or $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{k\in\mathbb{N}} k^n\,\mathrm{e}^{-k^2} \text{ converge.}}$$

D'autre part, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-p}^{0} k^n\,\mathrm{e}^{-k^2} = \sum_{k=0}^{p} (-k)^n\,\mathrm{e}^{-k^2} = (-1)^n \sum_{k=0}^{p} k^n\,\mathrm{e}^{-k^2} \qquad \text{en posant } \tilde{k} = -k.$$

Donc $\sum_{k\in\mathbb{Z}_-} k^n\,\mathrm{e}^{-k^2}$ converge également. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^n\,\mathrm{e}^{-k^2} \text{ converge.}}$$

On admet dans la suite que pour tout entier naturel n, I_n et J_n existent et sont finies.

3. Soit n un entier naturel pair. Alors, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$. Soient $(A, B) \in \mathbb{R}_+^2$. On a

$$\begin{aligned}
\int_{-B}^{A} x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-B}^{0} x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{A} x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{B}^{0} (-x)^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,(-\mathrm{d}x) + \int_{0}^{A} x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{en posant } \tilde{x} = -x \\
&= \int_{0}^{B} x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{A} x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{car } n \text{ est pair.}
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
J_n &= \lim_{B\to+\infty} \int_{-B}^{0} x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{A\to+\infty} \int_{0}^{A} x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{B\to+\infty} \int_{0}^{B} x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{A\to+\infty} \int_{0}^{A} x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= I_n + I_n.
\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout entier naturel pair n,

$$\boxed{J_n = 2I_n}.$$

Si n est impair, alors, on a de même,

$$\int_{-B}^{A} x^n \,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_0^B x^n \,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^A x^n \,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Donc

$$J_n = \lim_{B\to+\infty} -\int_0^B x^n \,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{A\to+\infty}\int_0^A x^n \,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = I_n - I_n = 0.$$

Conclusion, si n est impair,

$$\boxed{J_n = 0.}$$

4. Soit $A \in \mathbb{R}_+$. En reconnaissant directement une primitive, on obtient que

$$\int_0^A x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{x=0}^{x=A} = \frac{1-\mathrm{e}^{-A^2}}{2}.$$

Ainsi,

$$I_1 = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{2}.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathbb{R}_+$. On s'intéresse à

$$\int_0^A x^{n+2}\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Posons pour tout $x \in [0; A]$,

$$\begin{cases} u(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2} \\ v(x) = x^{n+1}. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0; A]$ et

$$\forall x \in [0; A]\,, \qquad \begin{cases} u'(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2} \\ v'(x) = (n+1)\,x^n. \end{cases}$$

Dès lors, par intégration par parties,

$$\int_0^A x^{n+2}\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{n+1}}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{x=0}^{x=A} - \int_0^A -\frac{n+1}{2}x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{A^{n+1}}{2}\,\mathrm{e}^{-A^2} + \frac{n+1}{2}\int_0^A x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

En passant à la limite quand $A \to +\infty$, par croissance comparée, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n.}$$

6. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathscr{P}(k) : \qquad « \ I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{et} \qquad I_{2k+1} = \frac{k!}{2} \ ».$$

Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $k = 0$, on a

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}J_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{par la question 3. et l'énoncé.}$$

Or $\frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{0!}{2^0 0!}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. De plus, par la question 4.

$$I_1 = \frac{1}{2} = \frac{0!}{2} = \frac{k!}{2}.$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(k) \Rightarrow \mathscr{P}(k+1)$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ et démontrons $\mathscr{P}(k+1)$. Par la question précédente puis l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} I_{2(k+1)} &= I_{2k+2} \\ &= \frac{2k+1}{2} I_{2k} \\ &= \frac{2k+1}{2}\frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}k!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\frac{(2(k+1))!}{2^{2(k+1)}(k+1)!}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}(k+1)!} = (2k+2)\frac{(2k+1)!}{2 \times 2^{2k+1} \times (k+1) \times k!}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}k!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

De même, par la question précédente et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} I_{2(k+1)+1} &= I_{2k+3} \\ &= \frac{2k+1+1}{2} I_{2k+1} \\ &= (k+1)\frac{k!}{2} \\ &= \frac{(k+1)!}{2}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{et} \qquad I_{2k+1} = \frac{k!}{2}.}$$

7. (a) Soit P une fonction polynomiale. Si P est nul alors la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} P(k)\,\mathrm{e}^{-k^2}$ converge. Supposons P non nul, notons $d = \deg(P)$ et a_d son coefficient dominant. Alors,

$$\left|P(k)\,\mathrm{e}^{-k^2}\right| \underset{k\to+\infty}{\sim} |a_d|\,k^d\,\mathrm{e}^{-k^2}.$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|a_d|\, k^d\, \mathrm{e}^{-k^2} \geqslant 0$. Donc $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left|P(k)\,\mathrm{e}^{-k^2}\right|$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_d|\, k^d\, \mathrm{e}^{-k^2}$ sont de même nature. Or par la question 2. $\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_d|\, k^d\, \mathrm{e}^{-k^2}$ converge. Donc $\sum_{k\in\mathbb{N}} P(k)\,\mathrm{e}^{-k^2}$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Donc $\sum_{k\in\mathbb{N}} P(k)\,\mathrm{e}^{-k^2}$ converge. De même,

$$\left|P(k)\,\mathrm{e}^{-k^2}\right| \underset{k\to-\infty}{\sim} |a_d|\,|k|^d\,\mathrm{e}^{-k^2}.$$

Donc $\sum_{k\in\mathbb{Z}_-} P(k)\,\mathrm{e}^{-k^2}$ converge également. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k\in\mathbb{Z}} P(k)\,\mathrm{e}^{-k^2} \text{ converge.}}$$

On admet dans la suite que de même $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ existe et est finie.

(b) Soit Q une fonction polynomiale telle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} Q^2(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 0$. Montrons que la fonction Q est identiquement nulle (question plus subtile qu'il n'y paraît pour nous pauvres premières années que nous sommes). Posons

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \int_{-A}^{A} Q^2(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x. \end{array}$$

Puisque la fonction $x \mapsto Q^2(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}$ est continue, la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q^2(x)\,\mathrm{e}^{-x^2} \geqslant 0$. Donc pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, par croissance de l'intégrale, car $-A \leqslant A$,

$$F(A) \geqslant 0$$

De plus, comme $g : x \mapsto Q^2(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}$ est continue, par le théorème fondamentale de l'analyse, $G : A \mapsto \int_0^A Q^2(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est une primitive de g. Donc G est $\mathscr{C}^1$. Or pour tout $A \in \mathbb{R}$, $F(A) = G(A) - G(-A)$, donc F est aussi C^1 et de plus,

$$F'(A) = G'(A) + G'(-A) = g(A) + g(-A).$$

Comme g est positive, F' aussi et donc F est croissante sur $\mathbb{R}$. Enfin, par hypothèse,

$$\lim_{A\to+\infty} F(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q^2(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ainsi, F est croissante et $\lim_{+\infty} F = 0$. Donc par le théorème de convergence monotone, on en déduit que pour tout $A \in \mathbb{R}$, $F(A) \leqslant 0$. Or F est positive sur $\mathbb{R}_+$. D'où, pour tout $A \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_{-A}^{A} Q^2(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = F(A) = 0.$$

Soit $A \in \mathbb{R}^*$. La fonction g est continue sur $[-A; A]$, positive sur $[-A; A]$ et son intégrale est nulle : $F(A) = 0$. Donc par le théorème de séparation de l'intégrale, g est nulle sur $[-A; A]$. Ceci étant vrai pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad Q^2(x)\,\mathrm{e}^{-x^2} = g(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad Q(x) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } Q \text{ est identiquement nulle sur } \mathbb{R}.}$$

(c) Soient $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$. Alors $PQ \in \mathbb{R}[X]$. Donc par la question (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ existe et donc l'application

$$\varphi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \langle P,Q\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \end{array}$$

existe bien sur $\mathbb{R}[X]^2$.

- *(symétrie)* Soient $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,
$$\varphi(P,Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)P(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \varphi(Q,P).$$
Donc φ est symétrique.
- *(bilinéarité)* Soient $(P_1,P_2,Q) \in \mathbb{R}[X]^3$ et $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. On a
$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x)Q(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda_1\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} P_1(x)Q(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \lambda_2\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} P_2(x)Q(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\qquad \text{par linéarité de l'intégrale et de la limite} \\ &= \lambda_1\varphi(P_1,Q) + \lambda_2\varphi(P_2,Q).\end{aligned}$$
Donc φ est linéaire à gauche. Donc par symétrie, φ est linéaire à droite aussi et donc bilinéaire.
- *(positive)* Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q^2(x)\,\mathrm{e}^{-x^2} \geqslant 0$. Donc par croissance de l'intégrale pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, comme $-A \leqslant A$,
$$\int_{-A}^{A} Q^2(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$
Par passage à la limite quand $A \to +\infty$, on a
$$\varphi(Q,Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} Q^2(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$
- *(séparation/définie)* Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, tel que
$$\varphi(Q,Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} Q^2(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 0.$$
Alors par la question précédente, $Q = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

Conclusion,
$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ définie bien un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

(d) Par définition, $H_0 = 1$ puis pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x) = H_0'(x) - 2xH_0(x) = -2x$. Ainsi, pour tout $A \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-A}^{A} H_0(x)H_1(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-A}^{A} (-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{-A}^{A} \\ &= 0.\end{aligned}$$
Donc par passage à la limite quand $A \to +\infty$,
$$\boxed{\langle H_0, H_1\rangle = 0.}$$
On admettra, pour la suite du problème que :
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \quad \langle H_{2p}, H_{2q+1}\rangle = 0$$

(e) On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire : pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\|P\| = \sqrt{\langle P, P\rangle}$. On a $H_0 = 1$. Donc, d'après l'énoncé,

$$\|H_0\|^2 = \langle H_0, H_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Ainsi, $e_0 = H_0 = 1$. Puis, par la question précédente,

$$\langle H_1, e_0\rangle = \langle H_1, H_0\rangle = 0. \tag{1}$$

Donc $v_1 = H_1$. Poursuivons,

$$\|H_1\|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-2x)^2\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\sqrt{\pi}} J_2.$$

Or par la question 3. puis 6.

$$J_2 = 2I_2 = 2\frac{2!}{2^2 1!}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Donc $\|H_1\| = \sqrt{2}$ et

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{H_1}{\sqrt{2}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\sqrt{2}x \end{array}.$$

Pour v_2, on calcule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_2(x) = H_1'(x) - 2xH_1(x) = -2 + 4x^2.$$

Puis,

$$\langle H_2, e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle H_2, H_1\rangle = 0. \tag{2}$$

Et

$$\begin{aligned}\langle H_2, e_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(4x^2 - 2\right)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(4J_2 - 2\sqrt{\pi}\right) \\ &= 2 - 2 = 0.\end{aligned}$$

Donc $v_2 = H_2$. Enfin,

$$\|H_2\|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(4x^2 - 2\right)^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(16J_4 - 16J_2 + 4\sqrt{\pi}\right).$$

Or

$$J_4 = 2I_4 = 2\frac{4!}{2^4 2!}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{4\times 3\times 2}{16\times 2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

Donc

$$\|H_2\|^2 = 12 - 8 + 4 = 8.$$

Conclusion,

$$\boxed{e_0 = H_0 = 1, \qquad e_1 = \frac{H_1}{\sqrt{2}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\sqrt{2}x \end{array}, \qquad e_2 = \frac{H_2}{2\sqrt{2}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2x^2 - 1\right) \end{array}.}$$

Avec les calculs précédents, on a

$$\begin{aligned}
\langle e_0, e_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle H_0, H_1\rangle = 0 && \text{par (1)}\\
\langle e_0, e_2\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\langle H_0, H_2\rangle = 0 && \text{par (2)}\\
\langle e_1, e_2\rangle &= \frac{1}{4}\langle H_1, H_2\rangle = 0 && \text{par la question précédente.}
\end{aligned}$$

Donc la famille (e_0, e_1, e_2) est orthogonale. De plus,

$$\|e_0\| = \left\|\frac{H_0}{\|H_0\|}\right\| = \frac{\|H_0\|}{\|H_0\|} = 1.$$

De même $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La famille } (e_1, e_2, e_3) \text{ est une famille orthonormée.}}$$

On note également que

$$\mathrm{Vect}\,(H_0, H_1, H_2) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3) \qquad \begin{aligned} C_2 &\leftarrow \tfrac{C_2}{\sqrt{2}}\\ C_3 &\leftarrow \tfrac{C_3}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Enfin soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1\, e_1 + \lambda_2\, e_2 + \lambda_3\, e_3 = 0.$$

Autrement dit,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_0 - \sqrt{2}\,\lambda_1\, x + \lambda_2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2x^2 - 1\right) = 0.$$

Donc en dérivant deux fois,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -\sqrt{2}\,\lambda_1 + \lambda_2\, 2\sqrt{2}x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2\, 2\sqrt{2} = 0.$$

Ainsi, $\lambda_2 = 0$ puis $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_0 = 0$. Donc (e_0, e_1, e_2) est libre. On peut donc aussi conclure pour être plus précis que

$$\boxed{(e_1, e_2, e_3) \text{ est une base orthonormée de } \mathrm{Vect}\,(H_0, H_1, H_2)\,.}$$

Ce que nous avons fait en calculant au fur et à mesure les v_i puis les e_i est ce que l'on appelle le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt qui permet toujours de transformer une base d'un espace vectoriel en une base orthonormée. Cf programme de seconde année.

Partie II

Pour tout réel x, on pose :

$$F(x) = x\int_1^2 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $t \mapsto \mathrm{e}^{-x^2t^2}$ existe et est continue sur $[1;2]$, la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

   - L'ensemble $\mathbb{R}$ est centré en 0.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F(-x) = -x\int_1^2 \mathrm{e}^{-(-x)^2t^2}\,\mathrm{d}t = -F(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{F \text{ est une fonction impaire sur } \mathbb{R}.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $u : t \mapsto xt$. La fonction u est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[1;2]$. De plus, $\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}t$. D'où,

$$F(x) = \int_1^2 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\, x\,\mathrm{d}t = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.}$$

3. La fonction $f : u \mapsto \mathrm{e}^{-u^2}$ est définie et même continue sur $\mathbb{R}$. Donc par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction

$$F_1 : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

existe et est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Donc F_1 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = F_1(2x) - F_1(x).$$

Donc en tant que composée et différence de fonctions qui le sont, on conclut que

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est continue et dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

L'énoncé initial mettait une indication dont je ne vois pas l'utilité...

4. D'après le préambule, on sait que f est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [x; 2x]$,

$$0 \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Donc par croissance de l'intégrale CAR $x \leqslant 2x$ car $x \geqslant 0$,

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Par croissance comparée, $x\,\mathrm{e}^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par le théorème d'encadrement F converge en $+\infty$ et

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.}$$

On pouvait aussi voir que $F_1(x) \underset{x\to+\infty}{\longleftarrow} I_0 = \frac{J_0}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *et donc* $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0$.

5. Avec les notations précédentes, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F(2^n) = F_1\left(2^{n+1}\right) - F_1(2^n).$$

On reconnaît alors une somme télescopique : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n F\left(2^k\right) = \sum_{k=0}^n \left[F_1\left(2^{k+1}\right) - F_1\left(2^k\right)\right] = F_1\left(2^{k+1}\right) - F_1(1).$$

Or par la question 2., I_0 converge donc

$$F_1\left(2^{n+1}\right) = \int_0^{2^{n+1}} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I_0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} F(2^n) \text{ converge.}}$$

6. (a) Avec la notation précédente, puisque F_1 est une primitive de f,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F'(x) = 2F_1'(2x) - F_1'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2\,\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{-x^2}.}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = \mathrm{e}^{-x^2}$,

$$\begin{aligned} F'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2X^4 - X = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad X = 0 \text{ OU } X^3 = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad X = 0 \text{ OU } X = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-x^2} = 0 \text{ impossible OU } \mathrm{e}^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ &\Leftrightarrow \quad -x^2 = \ln\left(2^{-1/3}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{3}\ln(2). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{F'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}} \text{ OU } x = -\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}.}$$

(c) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $X = \mathrm{e}^{-x^2}$. De même que dans la question précédente,

$$F'(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2X^4 - X \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad X\left(2X^3 - 1\right) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2X^3 - 1 \geqslant 0$$

car $X = \mathrm{e}^{-x^2} > 0$. Donc

$$F'(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad X^3 \geqslant \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad X \geqslant \frac{1}{2^{1/3}} \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 \geqslant -\frac{\ln(2)}{3}$$

Donc

$$x^2 \leqslant \frac{\ln(2)}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}} \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$$

De plus, on sait que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$ et par imparité, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$. D'où,

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-F\left(\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}\right)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$F\left(\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}\right)$	$\searrow$	0

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a déjà vu que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[x; 2x]$

$$\forall t \in [x; 2x], \qquad \mathrm{e}^{-4x^2} \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}.$$

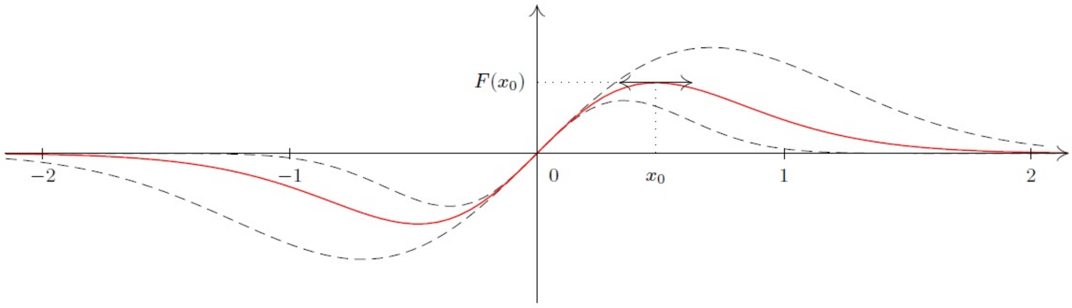
Donc par croissance de l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens, car $2x \geqslant x$ car $x \geqslant 0$,

$$\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-4x^2}\,\mathrm{d}t \leqslant F(x) \leqslant \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}t \qquad \Leftrightarrow \qquad x\,\mathrm{e}^{-4x^2} \leqslant F(x) \leqslant x\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad x\,\mathrm{e}^{-4x^2} \leqslant F(x) \leqslant x\,\mathrm{e}^{-x^2}.}$$

8. On obtient l'allure suivante :



9. (a) Par la question 3. la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$ donc on en déduit directement que

$$\boxed{F \text{ admet des primitives sur } \mathbb{R}.}$$

On désignera par G la primitive de F s'annulant en 0.

(b) On introduit :

$$\ell_G = \lim_{x \to +\infty} G(x)$$

Par la question (c), la fonction $G' = F$ est positive sur $\mathbb{R}_+$. Donc G est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, par le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{\ell_G \text{ existe dans } \overline{\mathbb{R}} \text{ et même dans } \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.}$$

(c) Puisque F est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamentale de l'analyse, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G(x) = \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $t\,\mathrm{e}^{-4t^2} \leqslant F(t) \leqslant t\,\mathrm{e}^{-t^2}$. Donc par croissance de l'intégrale, pour $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^x t\,\mathrm{e}^{-4t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant G(x) \leqslant \int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad &\Leftrightarrow \qquad \left[-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-4t^2}\right]_{t=0}^{t=x} \leqslant G(x) \leqslant \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_{t=0}^{t=x} \\
&\Leftrightarrow \qquad \frac{1-\mathrm{e}^{-4x^2}}{8} \leqslant G(x) \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{2}.
\end{aligned}$$

Donc par passage à la limite quand $x \to +\infty$,

$$\boxed{\frac{1}{8} \leqslant \ell_G \leqslant \frac{1}{2}.}$$

10. (a) D'après le cours, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\mathrm{e}^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right).}$$

(b) Par la question précédente, en posant $u = -x^2 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$,

$$\mathrm{e}^{-x^2} \underset{x \to 0}{=} 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + o\left(x^{2n}\right).$$

Donc par primitivation des développements limités,

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&\underset{x\to 0}{=} F_1(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,n!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 0 + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,k!} + o\left(x^{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
F(x) &\underset{x\to 0}{=} F_1(2x) - F_1(x) \\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)\,k!} + o\left(x^{2n+1}\right) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,k!} + o\left(x^{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{F(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(2^{2k+1}-1\right) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,k!} + o\left(x^{2n+1}\right).}$$

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(2^{2k+1}-1\right) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,k!}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$0 \leqslant \left|(-1)^k \left(2^{2k+1}-1\right) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,k!}\right| \leqslant 2^{2k+1} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)\,k!} \leqslant |2x| \frac{\left(4x^2\right)^k}{(2k+1)\,k!} \leqslant |2x| \frac{\left(4x^2\right)^k}{k!}.$$

Posons $X = 4x^2$. On sait que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{X^n}{n!}$ converge en tant que série exponentielle. Donc par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left|(-1)^k \left(2^{2k+1}-1\right) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}\right|$ converge i.e. $\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \left(2^{2k+1}-1\right) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (S_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

Partie III

Dans ce qui suit, f est la fonction introduite dans le Préambule.
Pour tout entier naturel non nul n, tout entier naturel $k \leqslant n$ et tout réel x, on pose :

$$R_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad , \quad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) R_{n,k}(x)$$

1. Soit x un réel, et n un entier naturel. On a

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k R_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Pour $n \neq 0$, posons $\tilde{k} = k - 1$, alors,

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n}{k+1} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \frac{n!}{(n-k)!k!} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1}. \end{aligned}$$

Si $x \neq 1$,

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n} (n-k) \frac{n!}{(n-k)!k!} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} \\ &= n \frac{x}{1-x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \frac{x}{1-x} T_n \\ &= n \frac{x}{1-x} (x+1-x)^n - \frac{x}{1-x} T_n. \end{aligned}$$

Donc

$$\left(1 + \frac{x}{1-x}\right) T_n = n \frac{x}{1-x} \qquad \Leftrightarrow \qquad T_n = nx.$$

Si $x = 1$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n\binom{n}{n} = n$, la formule reste vraie. De même, si $n = 0$, $T_0 = 0$ et la formule reste vraie. Conclusion, dans tous les cas,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k R_{n,k}(x) = nx.}$$

2. *Ouuuuuuu la question cadeau ! Même en fin de sujet. Preuve qu'il faut lire l'intégralité d'un sujet avant de commencer.*

   Soit p un réel tel que $0 < p < 1$. On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

   D'après le cours, on a directement

$$\boxed{S_n \sim \mathscr{B}(n,p) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}(S_n) = np.}$$

   Naturellement cela est bien cohérent avec la question précédente lorsque $x = p \in]0;1[$.

   Le commentaire du jury parle de redéfinir la loi de Binomiale, je n'ai pas compris ce commentaire.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}(S_n = k).$$

   Comme $S_n \sim \mathscr{B}(n,p)$, on obtient,

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) R_{n,k}(p).$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(p).}$$

(b) Soit ε un réel strictement positif. On observe que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\eta > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \eta\right] = \mathbb{P}\left[|S_n - np| \geqslant n\eta\right] = \mathbb{P}\left[|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant n\eta\right].$$

Donc, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \eta\right] \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n^2\eta^2} = \frac{np(1-p)}{n^2\eta^2} = \frac{p(1-p)}{n\eta^2}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p(1-p)}{n\eta^2} = 0$. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \eta\right] = 0.$$

On démontre dans le cas particulier d'une loi binomiale, la loi faible des grands nombres, qui est directement un résultat de cours en seconde année.

Donc par définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\boxed{\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \eta\right] \leqslant \varepsilon.}$$

(c) Soit $\eta > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par le principe du tiers exclus, on a

$$\left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant \eta \text{ OU } \left|\frac{k}{n} - p\right| > \eta.$$

Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que

$$\boxed{\left\{k \in \mathbb{N}, \left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant \eta\right\} \cup \left\{k \in \mathbb{N}, \left|\frac{k}{n} - p\right| > \eta\right\} ? = \mathbb{N}.}$$

(d) Par la question (a) puis la linéarité de l'espérance, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(p) - B_n(f)(p)| = \left|f(p) - \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]\right| = \left|\mathbb{E}\left[f(p) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]\right|.$$

Par l'inégalité triangulaire pour l'espérance,

$$|f(p) - B_n(f)(p)| \leqslant \mathbb{E}\left[\left|f(p) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right].$$

Par le théorème de transfert,

$$|f(p) - B_n(f)(p)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(p).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par la question 4.(b) du préliminaire, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [0;1]^2$,

$$|x - y| \leqslant \eta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Notons $\mathcal{N}_1 = \left\{k \in \mathbb{N}, \left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant \eta\right\}$ et $\mathcal{N}_2 = \left\{k \in \mathbb{N}, \left|\frac{k}{n} - p\right| > \eta\right\}$. Par la question précédente, $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 = \mathbb{N}$. De plus, l'union est disjointe. Donc

$$\sum_{k=0}^{n} \left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(p) = \sum_{k\in\mathcal{N}_1\cap[\![0;n]\!]} \left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(p) + \sum_{k\in\mathcal{N}_2\cap[\![0;n]\!]} \left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(p).$$

Or si $k \in \mathscr{N}_1 \cap [\![0;n]\!]$, alors, on a $p \in [0;1]$, $\frac{k}{n} \in [0;1]$ et $\left|p - \frac{k}{n}\right| \leqslant \eta$. Donc $\left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon$. Ainsi,

$$\sum_{k \in \mathscr{N}_1 \cap [\![0;n]\!]} \left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(p) \leqslant \sum_{k \in \mathscr{N}_1 \cap [\![0;n]\!]} \varepsilon\, R_{n,k}(p) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \varepsilon\, R_{n,k}(p) = \mathbb{E}(\varepsilon) = \varepsilon\,.$$

Notez que pour le moment cela reste vrai pour n quelconque.

D'autre part, on sait également que $\max_{t \in [0;1]} |f(t)| \leqslant 1$. Donc pour tout $k \in \mathscr{N}_2 \cap [\![0;n]\!]$,

$$\left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant |f(p)| + \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant 2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathscr{N}_2 \cap [\![0;n]\!]} \left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(p) &\leqslant \sum_{k \in \mathscr{N}_2 \cap [\![0;n]\!]} 2R_{n,k}(p) \\
&= 2 \sum_{k \in \mathscr{N}_2 \cap [\![0;n]\!]} \mathbb{P}(S_n = k) \\
&= 2\mathbb{P}(S_n \in \mathscr{N}_2 \cap [\![0;n]\!]) \\
&= 2\mathbb{P}(S_n \in \mathscr{N}_2) \qquad \text{car } S_n(\Omega) = [\![0;n]\!] \\
&= 2\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \eta\right).
\end{aligned}$$

Par la question précédente, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\sum_{k \in \mathscr{N}_2 \cap [\![0;n]\!]} \left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(p) \leqslant 2\,\varepsilon\,.$$

Finalement, par les questions précédentes, on obtient

$$|f(p) - B_n(f)(p)| \leqslant \varepsilon + 2\,\varepsilon = 3\,\varepsilon\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad |f(p) - B_n(f)(p)| \leqslant 3\,\varepsilon\,.}$$

Autrement dit, $(B_n(f)(p))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} B_n(f)(p) = f(p).}$$