Banque PT - Maths C - 2022
Version pour juniors

Les parties en bleu ont été modifiées par rapport sujet initial.

Préambule

1. Rappeler le domaine de définition de la fonction tangente, puis donner, sans démonstration sa parité et sa dérivée, ainsi que pour sa restriction à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ses variations (on demande le tableau de variations, où apparaîtront les limites aux bornes).

2. Montrer, à l'aide d'un théorème de cours qui sera énoncé, que la fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire l'existence de sa fonction réciproque arctangente. Donner sans démonstration, la dérivée de la fonction artangente.

3. Déduire des variations de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ celles de sa réciproque artangente, et retrouver ce résultat à l'aide de la dérivée de la fonction arctangente obtenue à la question précédente.

4. Tracer sur le même graphe (échelle : 2 cm pour une unité), les courbes représentatives de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, et de la fonction arctangente sur $\mathbb{R}$. On rappellera comment le tracé de la courbe représentative de la fonction arctangente se déduit de celui de la fonction tangente.

5. Exprimer, pour tout réel t de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$, $1+\frac{1}{\tan^2(t)}$ en fonction uniquement de $\sin^2 t$.

Partie I

1. Pour tout réel x, on pose :
$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+x^2+t^2}.$$
Autrement dit lorsque la limite existe,
$$F(x)=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{+A}\frac{\mathrm{d}t}{1+x^2+t^2}.$$
On pose également,
$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n(x)=\frac{1}{1+x^2+n^2}.$$
   (a) Etudier, pour tout réel x, la convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n(x)$.

   (b) Que vaut $F(0)$?

   (c) Exprimer, pour tout réel x, $F(x)$ en fonction de x.

2. Soit α un réel positif. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :
$$u_n=\frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^\alpha}},\qquad I_n=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2(t)},\qquad J_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha\sin^2(t)}.$$
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel α pour que la série $\sum u_n$ converge.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :
$$I_{n+1}\leqslant J_n\leqslant I_n.$$

(c) i. Montrer que pour tout entier naturel non nul n $I_n = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2(t)}$.

ii. Soit $\varepsilon \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$ et n un entier naturel non nul. Appliquer le changement de variable $u = \frac{1}{\tan(t)}$, que l'on justifiera avec soin à $\displaystyle\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2(t)}$.
(On pensera à utiliser le résultat de la question 5. du Préambule).

iii. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n :

$$I_n = F\left(n^{\frac{\alpha}{2}}\pi^{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

(d) En déduire, pour tout entier naturel non nul n :

$$u_{n+1} \leqslant J_n \leqslant u_n.$$

(e) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel α pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha\sin^2(t)}$ converge i.e. la fonction $X \mapsto \displaystyle\int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha\sin^2(t)}$ converge en $+\infty$.

Partie II

Soit R un réel strictement positif, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux séries numériques telles que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x$ converge pour tout $x \in]-R; R[$. On pose alors

$$\forall x \in]-R;R[, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

1. On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n = \frac{1}{n!}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{2^n}{n!}$.

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n$ converge puis montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f(x))^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$.

On admet la généralisation du résultat précédent. Pour tout $x \in]-R; R[$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n$ converge et de plus,

$$\forall x \in]-R;R[, \qquad f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \qquad (\bigstar)$$

2. On suppose désormais que la fonction f s'annule en zéro, et que, pour tout réel x de $]-R; R[$:

$$f'(x) = 1 + (f(x))^2.$$

On admet que pour tout réel x de $]-R; R[$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n x^{n-1}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = f'(x)$.

(a) En déduire la relation de récurrence vérifiée, pour tout entier naturel n, par les coefficients a_n.
On pourra utiliser sans démonstration que pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\left(\forall x \in]-R;R[, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n = 0\right) \quad \Rightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0). \qquad (\bigstar\bigstar)$$

(b) Démontrer par récurrence forte, que, pour tout entier naturel p : $a_{2p} = 0$.
Que peut-on en déduire pour la parité de la fonction f ?

(c) Montrer que $f'(0) = 1$ puis calculer a_1, a_3, a_5, a_7.

(d) A l'aide des résultats précédents, donner le développement limité, à l'ordre 7, au voisinage de zéro, de la fonction f. On admet que la fonction tangente a le même développement limité au voisinage de zéro.

Partie III

1. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$H_n = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\,\mathrm{d}u, \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad h_k = \frac{k^{2n}}{1+k^{4n}}.$$

(a) Etudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} h_k$.

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n existe dans $\mathbb{R}$.

(b) Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u^{2n}\,\mathrm{d}u.$$

(c) Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\,\mathrm{d}u.$$

(d) En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} H_n.$$

2. Pour tout entier naturel non nul n, et tout réel strictement positif x, on note $\sqrt[2n]{x} = x^{\frac{1}{2n}}$. On pose pour tout $\varepsilon \in \left]0;\frac{\pi}{4}\right[$:

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[2n]{\tan(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad L_n(\varepsilon) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sqrt[2n]{\tan(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad L_n = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sqrt[2n]{\tan(x)}\,\mathrm{d}x.$$

(a) Justifier que pour tout entier naturel non nul n et tout $\varepsilon \in \left]0;\frac{\pi}{4}\right[$, K_n et $L_n(\varepsilon)$ existent.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

i. Montrer que pour tout $\varepsilon \in \left]0;\frac{\pi}{4}\right[$,

$$L_n(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt[2n]{\tan(x)}}\,\mathrm{d}x.$$

ii. Montrer que pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) \geqslant x$.

iii. En déduire que $\varepsilon \mapsto L_n(\varepsilon)$ est majorée sur $\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$.

iv. Conclure que $L_n = \lim_{\varepsilon\to0^+} L_n(\varepsilon)$ existe.

(c) Montrer que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée.

(d) Etudier le sens de variation de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(e) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$L_n \geqslant \frac{\pi}{4}.$$

(f) En déduire la convergence de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} (K_n + L_n) \geqslant \frac{\pi}{4}.$$

3. Pour tout entier naturel non nul n et tout réel $\varepsilon \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$, effectuer en le justifiant, le changement de variable $\tan(x) = u^{2n}$ dans l'intégrale $(K_n + L_n(\varepsilon))$, puis donner, pour tout entier naturel non nul n, une relation entre $(K_n + L_n)$ et H_n.

4. En déduire l'existence d'une constante réelle H telle que, lorsque n tend vers l'infini :
$$H_n \sim \frac{H}{n}.$$

Partie IV

1. Soit Φ la fonction définie, pour tout réel non nul x, par :
$$\Phi(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$
Montrer que Φ est prolongeable par continuité en zéro.

Dans ce qui suit, on désigne encore par Φ la fonction ainsi prolongée. On admettra que la fonction Φ est développable en série entière sur $]-2\pi; 2\pi[$: il existe $(B_n)_{\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in]-2\pi; 2\pi[$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} B_n \frac{x^n}{n!}$ converge et
$$\forall x \in]-2\pi; 2\pi[, \qquad \Phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

2. Que vaut B_0 ?

3. En remarquant que, pour tout réel x de $]-2\pi; 2\pi[$:
$$x = (\mathrm{e}^x - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!},$$
montrer à l'aide de la relation $(\bigstar)$ que l'on peut aussi écrire :
$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k \right) \frac{x^n}{n!}.$$

4. (a) Montrer à l'aide de l'implication $(\bigstar\bigstar)$ que, pour tout entier naturel non nul n :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0,$$
puis :
$$(n+1) B_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k.$$

(b) Calculer $2B_2$ et $4B_4$. Que remarque-t-on par rapport aux coefficients a_3 er a_5 de la partie II ?

Ce problème fait intervenir des intégrales généralisées, pour lesquelles la fonction tangente permet soit d'obtenir leur convergence, soit de les calculer. Cette très classique fonction trigonométrique vérifie aussi une équation différentielle permettant d'obtenir son développement en série entière, où interviennent les nombres de Benoulli, que l'on retrouve dans de nombreux autres développements en série entière, ou encore dans la formule d'Euler Mac-Laurin, qui relie des sommes discrètes où apparaissent également les dérivées successives de la fonction, et des intégrales.

Fin de l'épreuve