Corrigé - Banque PT - Maths C - 2022
Version pour juniors

Les réponses en bleu sont les réponses des questions ajoutées ou modifiées par rapport sujet initial.

Préambule

Avant de faire des maths, un peu de récitation...

1. La fonction tangente est définie sur

$$\boxed{\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[.}$$

   La fonction tangente est $\boxed{\text{impaire}}$, dérivable sur $\mathscr{D}_{\tan}$,

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D}_{\tan}, \qquad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)},}$$

   et on a

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

2. On sait que la fonction est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ donc par

$$\boxed{\text{le théorème de la bijection}}$$

   la restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ définit une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right)$ et de plus, $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right) =]-\infty; +\infty[$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction tangente réalise une bijection de } \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\text{ sur } \mathbb{R}.}$$

   Donc arctan sa réciproque existe bien. De plus, on sait que arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.}$$

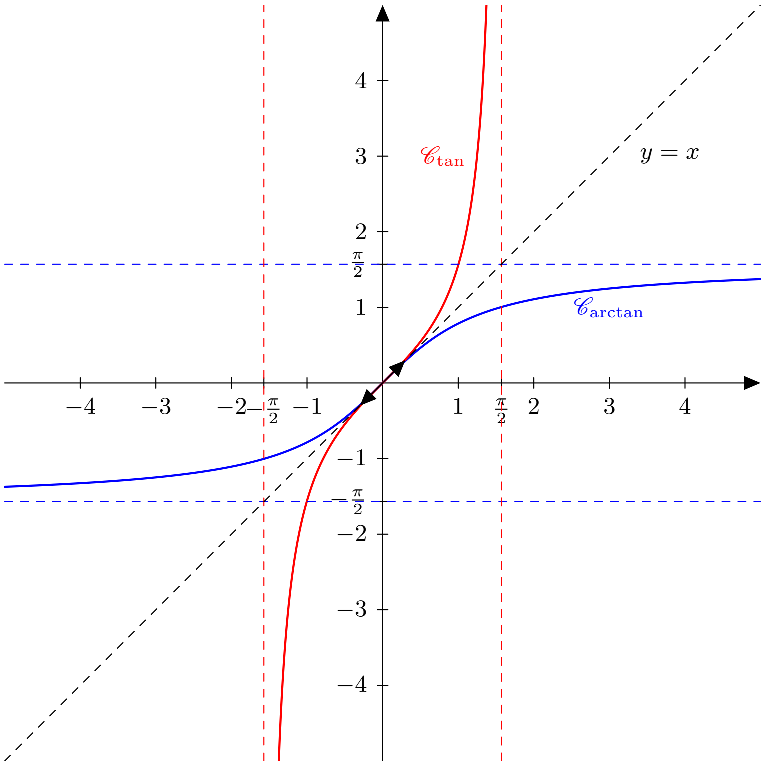
3. Par le théorème de la bijection, la réciproque de la restriction de la fonction tangente est de même stricte monotonie que la restriction de la fonction tangente. Donc

$$\boxed{\text{arctangente est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

   Ce qui est bien cohérent avec la stricte positivité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) > 0$ donc

$$\boxed{\text{arctangente est bien strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

4. On a les graphes suivants :



On obtient le graphe de la fonction arctangente à partir du graphe de la fonction tangente par une symétrie d'axe la droite d'équation $y = x$.

5. Soit $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$. On a

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\tan^2(t)} &= 1 + \frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)} \qquad \text{car } \cos(t) \neq 0 \\ &= \frac{\sin^2(t) + \cos^2(t)}{\sin^2(t)} \\ &= \frac{1}{\sin^2(t)} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[, \qquad 1 + \frac{1}{\tan^2(t)} = \frac{1}{\sin^2(t)}.}$$

Partie I

1. Pour tout réel x, on pose :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + x^2 + t^2}.$$

Autrement dit lorsque la limite existe,

$$F(x) = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{+A} \frac{\mathrm{d}t}{1 + x^2 + t^2}.$$

On pose également,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; v_n(x) = \frac{1}{1 + x^2 + n^2}.$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \leqslant 1 + x^2 + t^2$. Donc par la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 < \frac{1}{1+x^2+t^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison de séries à termes positifs, on en déduit,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n(x) \text{ converge.}}$$

(b) Soit $A \in \mathbb{R}$. Pour $x = 0$, on a

$$\int_{-A}^{+A} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2+t^2} = \int_{-A}^{+A} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan(t)]_{t=-A}^{t=A} = \arctan(A) - \arctan(-A) = 2\arctan(A).$$

Or la fonction arctan converge en $+\infty$ donc $F(0)$ existe et

$$F(0) = \lim_{A\to+\infty} 2\arctan(A) = 2\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Conclusion, $F(0)$ existe et

$$\boxed{F(0) = \pi.}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $A \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\int_{-A}^{+A} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2+t^2} &= \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]_{t=-A}^{t=A} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(\arctan\left(\frac{A}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \arctan\left(-\frac{A}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \arctan\left(\frac{A}{\sqrt{1+x^2}}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout réel x, $F(x)$ existe et

$$\boxed{F(x) = \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}.}$$

2. Soit α un réel positif. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$u_n = \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^\alpha}}, \qquad I_n = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha \sin^2(t)}, \qquad J_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2(t)}.$$

(a) Si $\alpha = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Dans ce cas $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge grossièrement et donc diverge.
Si $\alpha > 0$, alors,

$$u_n = \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^\alpha}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi^{1-\frac{\alpha}{2}}}{n^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n > 0.$$

Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\pi^{1-\frac{\alpha}{2}}}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ sont de même nature. Or, en tant que série de Riemann,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\pi^{1-\frac{\alpha}{2}}}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \text{ converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\alpha}{2} > 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha > 2.$$

Donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha > 2.$$

Conclusion, en résumé de tous les différents cas,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha > 2.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [n\pi; (n+1)\pi]$, puisque $\alpha \geqslant 0$,

$$n^\alpha \pi^\alpha \leqslant t^\alpha \leqslant (n+1)^\alpha \pi^\alpha.$$

Puis, comme $\sin^2(t) \geqslant 0$,

$$0 < 1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t) \leqslant 1 + t^\alpha \sin^2(t) \leqslant 1 + (n+1)^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t).$$

Donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$0 < \frac{1}{1 + (n+1)^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)} \leqslant \frac{1}{1 + t^\alpha \sin^2(t)} \leqslant \frac{1}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)}.$$

Donc par croissance de l'intégrale, car $n\pi \leqslant (n+1)\pi$, on obtient,

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1 + (n+1)^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant J_n \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Or en posant $s = t - n\pi$, la fonction $t \mapsto t - n\pi$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a $\mathrm{d}s = \mathrm{d}t$ et

$$\begin{aligned}
\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^\pi \frac{1}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(s + n\pi)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \left((-1)^n \sin(s)\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(s)}\,\mathrm{d}t \\
&= I_n.
\end{aligned}$$

De même, $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1 + (n+1)^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)}\,\mathrm{d}t = I_{n+1}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_{n+1} \leqslant J_n \leqslant I_n.}$$

(c) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la relation de Chasles,

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)} + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\mathrm{d}t}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)}.$$

Posons $s=\pi-t$ dans la seconde intégrale, $t\mapsto \pi-t$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{d}s=-\mathrm{d}t$ et alors

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2(t)}+\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-\mathrm{d}s}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2(\pi-s)}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2(t)}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}s}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2(s)}\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2(t)}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad I_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2(t)}.}$$

ii. Soit $\varepsilon\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$ et n un entier naturel non nul. Posons pour tout $t\in\left[\varepsilon;\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]=I_\varepsilon$, $u=\frac{1}{\tan(t)}$. Puisque $I_\varepsilon=\left[\varepsilon;\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]\subseteq\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(t)$ existe et est non nul donc $u=\frac{1}{\tan(t)}$ existe et est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t\in I_\varepsilon$, on a $\tan(t)=\frac{1}{u}$ et donc $t=\arctan\left(\frac{1}{u}\right)$ car $t\in I_\varepsilon\subseteq\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. La fonction $u\mapsto\arctan\left(\frac{1}{u}\right)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{d}t=-\frac{1}{u^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}\,\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$. Enfin, par la question 5. du Préambule on observe que

$$\sin^2(t)=\frac{1}{1+\frac{1}{\tan^2(t)}}=\frac{1}{1+u^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2(t)} &= \int_{\frac{1}{\tan(\varepsilon)}}^{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}}\frac{1}{1+n^\alpha\pi^\alpha\frac{1}{1+u^2}}\,\frac{-1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}}^{\frac{1}{\tan(\varepsilon)}}\frac{1}{1+u^2+n^\alpha\pi^\alpha}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}}^{\frac{1}{\tan(\varepsilon)}}\frac{1}{1+n^\alpha\pi^\alpha+u^2}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2(t)} = \int_{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}}^{\frac{1}{\tan(\varepsilon)}}\frac{1}{1+(1+n^\alpha\pi^\alpha)\,u^2}\,\mathrm{d}u.}$$

iii. Puisque $\tan(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow}0^+$, on a $\frac{1}{\tan(\varepsilon)}\underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow}+\infty$. De même, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow}+\infty$ donc $\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}\underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow}0$. Donc en passant à la limite quand $\varepsilon\to0^+$, dans le résultat précédent, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2(t)}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(1+n^\alpha\pi^\alpha)\,u^2}\,\mathrm{d}u\qquad(\bigstar).$$

D'une part, par la question 2.(c)i

$$I_n=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2(t)}.$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $A \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2+t^2} &= \int_{-A}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2+t^2} + \int_{0}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2+t^2} \\ &\underset{(s=-t)}{=} \int_{A}^{0} \frac{-\,\mathrm{d}s}{1+x^2+s^2} + \int_{0}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2+t^2} \\ &= \int_{0}^{A} \frac{\mathrm{d}s}{1+x^2+s^2} + \int_{0}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2+t^2} \\ &= 2\int_{0}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2+t^2}.\end{aligned}$$

Donc par passage à la limite quand $A \to +\infty$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2+t^2}.$$

Ainsi,

$$F\left(n^{\frac{\alpha}{2}}\pi^{\frac{\alpha}{2}}\right) = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+n^{\alpha}\pi^{\alpha}+u^2} \qquad \text{car la variable est muette.}$$

On obtient donc en multipliant par 2 (★)

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = F\left(n^{\frac{\alpha}{2}}\pi^{\frac{\alpha}{2}}\right).}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question 2.b

$$I_{n+1} \leqslant J_n \leqslant I_n.$$

Donc par la question précédente,

$$F\left((n+1)^{\frac{\alpha}{2}}\pi^{\frac{\alpha}{2}}\right) \leqslant J_n \leqslant F\left(n^{\frac{\alpha}{2}}\pi^{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Puis, par la question 1.c

$$\frac{\pi}{\sqrt{1+(n+1)^{\alpha}\pi^{\alpha}}} \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{1+n^{\alpha}\pi^{\alpha}}}.$$

Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} \leqslant J_n \leqslant u_n.}$$

(e) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $G : X \mapsto \displaystyle\int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{1+t^{\alpha}\sin^2(t)}$. Puisque $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $1+t^{\alpha}\sin^2(t) \geqslant 1 > 0$, on en déduit que $t \mapsto \frac{1}{1+t^{\alpha}\sin^2(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[0; X]$ pour tout $X \in \mathbb{R}_+$. Donc G est bien définie sur $\mathbb{R}_+$. De plus, par la relation de Chasles, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$G(n\pi) = \int_0^{n\pi} \frac{1}{1+t^{\alpha}\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1+t^{\alpha}\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} J_k,$$

en posant $J_0 = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+t^{\alpha}\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t$. Si $\alpha > 2$, alors par la question 2.a $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge. Or par la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n \leqslant u_n.$$

Or par positivité de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n \geqslant 0$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant J_n \leqslant u_n.$$

Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, si $\alpha > 2$,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} J_n \text{ converge.}$$

Autrement dit, $(G((n+1)\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore $(G(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. *Attention le fait que la fonction G converge sur une suite de points ne signifie pas que G converge globalement ! Un argument de monotonie est nécessaire.* La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction G est la primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$ qui s'annule en 0. Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad G'(t) = \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2(t)} > 0.$$

Donc la fonction G est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par le théorème de convergence monotone,

- G diverge vers $+\infty$ en $+\infty$,
- G converge vers une réel fini $(\sup_{X\in\mathbb{R}_+} G(X))$ en $+\infty$.

Puisque $(G(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, seul le second point est possible. Donc

$$\forall \alpha > 2, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2(t)} \text{ converge.}$$

Supposons maintenant que $\alpha \leqslant 2$. Par la question 2.a $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n+1}$ diverge. Or

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant J_n.$$

Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} J_n$ diverge i.e. $(G(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dès lors, dans ce cas seule la divergence de G vers $+\infty$ est possible :

$$\forall \alpha \leqslant 2, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2(t)} \text{ diverge.}$$

Conclusion,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2(t)} \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 2.}$$

Partie II

Soit R un réel strictement positif, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux séries numériques telles que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n x$ converge pour tout $x \in]-R;R[$. On pose alors

$$\forall x \in]-R;R[, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

1. On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n = \frac{1}{n!}$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

   $$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

   On reconnait un binôme de Newton,

   $$c_n = \frac{1}{n!}(1+1)^n.$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad c_n = \frac{2^n}{n!}.}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n}{n!} x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(2x)^n}{n!}.$$

On reconnait alors une série exponentielle de paramètre $z = 2x$. Or la série exponentielle converge pour tout $z \in \mathbb{R}$ (ou même pour tout $z \in \mathbb{C}$). Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n \text{ converge.}}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ converge en tant que série exponentielle. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, par la formule du produit de deux polynômes,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{n} \frac{x^l}{l!}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}\frac{1}{(k-i)!}\right) x^k = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Puisque la série converge, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k.$$

La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x^k}{k}$ converge et par continuité de la fonction carrée,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)^2 = \left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\right)^2.$$

Conclusion,

$$\boxed{(f(x))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \text{ converge.}}$$

On admet la généralisation du résultat précédent. Pour tout $x \in]-R;R[$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n$ converge et de plus,

$$\forall x \in]-R;R[\,, \qquad f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \qquad\qquad (\bigstar)$$

2. On suppose désormais que la fonction f s'annule en zéro, et que, pour tout réel x de $]-R;R[$:

$$f'(x) = 1 + (f(x))^2\,.$$

On admet que pour tout réel x de $]-R;R[$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n x^{n-1}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = f'(x)$.

(a) On admet que pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\left(\forall x \in]-R;R[\,, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n = 0\right) \qquad \Rightarrow \qquad (\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0)\,. \qquad\qquad (\bigstar\bigstar)$$

On sait que

$$\forall x \in]-R;R[\,, \qquad f'(x) = 1 + (f(x))^2\,.$$

De plus,

$$\forall x \in \left]-R;R\right[, \qquad f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}x^n.$$

Et par ($\bigstar$) avec $g=f$ et donc $b_n=a_n$, on a

$$(f(x))^2=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n,$$

avec pour tout $n\in\mathbb{N}$, $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. Ainsi,

$$\forall x \in \left]-R;R\right[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}x^n=1+\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n.$$

Ou encore

$$\forall x \in \left]-R;R\right[, \qquad 1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(c_n-(n+1)\,a_{n+1}\right)x^n=0.$$

Posons $u_0=1+c_0-a_1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=c_n-(n+1)\,a_{n+1}$. Donc par ($\bigstar\bigstar$) *(vous appellerez ça l'année prochaine l'unicité du développement en série entière)* on obtient

$$1+c_0-a_1=0 \;\Leftrightarrow\; 1+\sum_{k=0}^{0} a_k a_{-k}-a_1=0 \;\Leftrightarrow\; 1+a_0^2-a_1=0 \;\Leftrightarrow\; a_1=1+a_0^2,$$

Or on sait que $f(0)=0$ donc $0=a_0+\sum_{k=1}^{+\infty} a_k 0^k=a_0$. Donc

$$a_1=1.$$

et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$c_n-(n+1)\,a_{n+1}=0 \qquad\Leftrightarrow\qquad a_{n+1}=\frac{1}{n+1}c_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Conclusion,

$$\boxed{a_0=0, \qquad a_1=1 \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N}^*, \quad a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.}$$

(b) Posons pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(p)$: « $a_{2p}=0$ ». Procédons comme indiqué par une récurrence forte :
Initialisation. Si $p=0$, on a par la question précédente, $a_0=0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $p\in\mathbb{N}$. Supposons que pour tout $k\in[\![0;p]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie :

$$\forall k\in[\![0;p]\!], \qquad a_{2k}=0.$$

Dès lors, par la question précédente, avec $n=2p+1\geqslant 1$,

$$a_{2(p+1)}=a_{2p+2}=a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}=\frac{1}{2p+2}\sum_{k=0}^{2p+1} a_k a_{2p+1-k}.$$

En séparant les indices pairs des indices impairs,

$$\begin{aligned} a_{2p+2}&=\frac{1}{2p+2}\left(\sum_{j=0}^{p} a_{2j}a_{2p+1-2j}+\sum_{j=0}^{p} a_{2j+1}a_{2p+1-2j-1}\right)\\ &=\frac{1}{2p+2}\left(\sum_{j=0}^{p} a_{2j}a_{2p+1-2j}+\sum_{j=0}^{p} a_{2j+1}a_{2(p-j)}\right). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, pour tout $j \in [\![0;p]\!]$, $a_{2j} = 0$ et $p - j \in [\![0;p]\!]$, donc $a_{2(p-j)} = 0$. Ainsi,

$$a_{2p+2} = 0.$$

Donc $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.
Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \qquad a_{2p} = 0.}$$

Dès lors,

$$\forall x \in \left]-R;R\right[, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}.$$

On note que $]-R;R[$ est centré en 0 et pour tout $x \in]-R;R[$,

$$f(-x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} (-x)^{2k+1} = -\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} = -f(x).$$

On en déduit donc que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire.}}$$

(c) On a vu précédemment que

$$\forall x \in \left]-R;R\right[, \qquad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n.$$

En particulier, pour $x = 0$,

$$f'(0) = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1} \times 0 = a_1.$$

Or on a vu que $a_1 = 1$. D'où

$$\boxed{f'(0) = 1.}$$

On sait que $a_1 = 1$. Puis par la relation de récurrence, avec $n = 2$,

$$a_3 = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{2} a_k a_{2-k} = \frac{1}{3}\left(a_0 a_2 + a_1^2 + a_2 a_0\right) = \frac{1}{3}.$$

De même,

$$a_5 = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{4} a_k a_{4-k} = \frac{1}{5}\left(a_1 a_3 + a_3 a_1\right) = \frac{2}{15}.$$

Puis,

$$a_7 = \frac{1}{7}\left(a_1 a_5 + a_3^2 + a_5 a_1\right) = \frac{1}{7}\left(\frac{4}{15} + \frac{1}{9}\right) = \frac{12+5}{7 \times 45} = \frac{17}{315}.$$

Conclusion,

$$\boxed{a_3 = \frac{1}{3}, \qquad a_5 = \frac{2}{15}, \qquad a_7 = \frac{17}{315}.}$$

(d) Par ce qui précède, on a pour tout $x \in]-R;R[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_k x^k \\ &= a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \sum_{k=7}^{+\infty} a_k x^k \\ &= x + \frac{x}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \sum_{k=9}^{+\infty} a_k x^k. \end{aligned}$$

Posons pour tout $x \in]-R;R[$,

$$g(x) = \sum_{k=9}^{+\infty} a_k x^k.$$

Puisque par hypothèse, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ converge pour tout $x \in]-R;R[$ donc il en va de même pour $\sum_{n\geqslant 9} a_n x^n$ et g est bien définie sur $]-R;R[$. De plus,

$$\forall x \in]-R;R[\,, \qquad g(x) = x^9 \sum_{n=9}^{+\infty} a_n x^{n-7} = x^9 \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+9} x^n.$$

Dès lors,

$$\frac{g(x)}{x^8} = x\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+9}x^n \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \times a_9 = 0.$$

Donc

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^8\right).$$

On peut même montrer que $g(x) \underset{x\to 0}{=} O\left(x^9\right)$. Mais tout ceci implique que $g(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^7\right)$. Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o\left(x^7\right).}$$

On admet que la fonction tangente a le même développement limité au voisinage de zéro donc

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o\left(x^7\right).$$

A recaser en soirée pour impressionner son auditoire !

Partie III

1. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$H_n = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\,\mathrm{d}u, \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad h_k = \frac{k^{2n}}{1+k^{4n}}.$$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$h_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k^{2n}}{k^{4n}} = \frac{1}{k^{2n}}.$$

Or $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^{2n}}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2n \geqslant 2 > 1$. De plus pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k^{2n}} \geqslant 0$. Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} h_k \text{ converge.}}$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n existe dans $\mathbb{R}$.

   (b) *Mais c'est presque insultant ça comme question.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\int_0^1 u^{2n}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{2n+1}}{2n+1}\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{2n+1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u^{2n}\,\mathrm{d}u = 0.}$$

(c) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in [1; +\infty[$. On observe que pour tout $u \in [1; A]$,

$$0 < u^{4n} \leqslant 1 + u^{4n}.$$

Donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$0 \leqslant \frac{1}{1+u^{4n}} \leqslant \frac{1}{u^{4n}} \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leqslant \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \leqslant \frac{u^{2n}}{u^{4n}} = \frac{1}{u^{2n}} \qquad \text{car } u^{2n} \geqslant 0.$$

Donc par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens ($1 \leqslant A$),

$$0 \leqslant \int_1^A \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_1^A \frac{1}{u^{2n}}\,\mathrm{d}u$$

Or pour $n \geqslant 1$, $-2n+1 \leqslant -1 < 0$. Donc

$$\int_1^A u^{-2n}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{-2n+1}}{-2n+1}\right]_{u=1}^{u=A} = -\frac{1}{(2n-1)\,A^{2n-1}} + \frac{1}{2n-1} \leqslant \frac{1}{2n-1}.$$

Donc

$$0 \leqslant \int_1^A \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2n-1}.$$

On a admis que H_n existe donc,

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\,\mathrm{d}u = H_n - \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\,\mathrm{d}u \text{ aussi.}$$

Donc par passage à la limite quand $A \to +\infty$

$$0 \leqslant \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2n-1}.$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$. Donc par le théorème d'encadrement, la limite existe *(important!!!)* et on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\,\mathrm{d}u = 0.}$$

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $A \in [1; +\infty[$, par la relation de Chasles,

$$\int_0^A \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\,\mathrm{d}u + \int_1^A \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\,\mathrm{d}u.$$

Donc par passage à la limite quand $A \to +\infty$, qui existe car par hypothèse H_n existe :

$$H_n = \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\,\mathrm{d}u + \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\,\mathrm{d}u.$$

Or par les questions précédentes,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\,\mathrm{d}u = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\,\mathrm{d}u = 0.$$

Donc par somme, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} H_n = 0.}$$

2. Pour tout entier naturel non nul n, et tout réel strictement positif x, on note $\sqrt[2n]{x} = x^{\frac{1}{2n}}$. On pose pour tout $\varepsilon \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$:

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[2n]{\tan(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad L_n(\varepsilon) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sqrt[2n]{\tan(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad L_n = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sqrt[2n]{\tan(x)}\,\mathrm{d}x.$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$, $\tan(x) > 0$ donc

$$\sqrt[2n]{\tan(x)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2n}\ln(\tan(x))} \text{ existe.}$$

De plus, $x \mapsto \sqrt[2n]{\tan(x)}$ est continue sur $\left]0; \frac{\pi}{4}\right]$. Par ailleurs,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt[2n]{\tan(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2n}\ln(\tan(x))} = 0 = \sqrt[2n]{0}.$$

Donc $x \mapsto \sqrt[2n]{\tan(x)}$ est continue sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad K_n \text{ existe.}}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$. On a $\frac{\pi}{2} - \varepsilon \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$. Donc la fonction $x \mapsto \sqrt[2n]{\tan(x)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2n}\ln(\tan(x))}$ est continue sur le segment $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \varepsilon \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[\qquad L_n(\varepsilon) \text{ existe.}}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$. Posons $y = \frac{\pi}{2} - x$ i.e. $x = \frac{\pi}{2} - y$. La fonction $y \mapsto \frac{\pi}{2} - y$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right[$ et $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}y$. Donc

$$\begin{aligned} L_n(\varepsilon) &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sqrt[2n]{\tan(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\varepsilon} \sqrt[2n]{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}}\,(-1)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[2n]{\frac{\cos(y)}{\sin(y)}}\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \varepsilon \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[, \qquad L_n(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt[2n]{\tan(x)}}\,\mathrm{d}x.}$$

ii. Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, posons $h(x) = \tan(x) - x$. La fonction h est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$h'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) geq 0.$$

Donc la fonction h est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $h(0) = 0$. Donc pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $h(x) \geqslant 0$:

$$\boxed{\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan(x) \geqslant x.}$$

iii. Soit $\varepsilon \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$. Par la question précédente et décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in \left[\varepsilon; \frac{\pi}{4}\right]$,

$$0 < \frac{1}{\tan(x)} \leqslant \frac{1}{x}.$$

Donc par croissance de la fonction $t \mapsto \sqrt[2n]{t}$,

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt[2n]{\tan(x)}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[2n]{x}}.$$

Donc par croissance de l'intégrale, car $\varepsilon \leqslant \frac{\pi}{4}$,

$$0 \leqslant L_n(\varepsilon) \leqslant \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt[2n]{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Or pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt[2n]{x}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} x^{-\frac{1}{2n}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^{1-\frac{1}{2n}}}{1-\frac{1}{2n}}\right]_{x=\varepsilon}^{x=\frac{\pi}{4}} \qquad \text{car } \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{2} < 1 \\
&= \frac{(\pi/4)^{1-\frac{1}{2n}}}{1-\frac{1}{2n}} - \frac{(\varepsilon)^{1-\frac{1}{2n}}}{1-\frac{1}{2n}} \\
&\leqslant \frac{(\pi/4)^{1-\frac{1}{2n}}}{1-\frac{1}{2n}} \qquad \leftarrow \text{ indépendant de } \varepsilon.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\varepsilon \mapsto L_n(\varepsilon) \text{ est majorée sur } \left]0; \frac{\pi}{4}\right[\text{ par } M_n = \frac{(\pi/4)^{1-\frac{1}{2n}}}{1-\frac{1}{2n}}.}$$

iv. La fonction $\varepsilon \to L_n(\varepsilon)$ est par la question majorée sur $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$. De plus pour tout $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon' < \frac{\pi}{4}$, on a

$$L_n(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt[2n]{\tan(x)}}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{1}{\sqrt[2n]{\tan(x)}}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon'}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt[2n]{\tan(x)}}\,\mathrm{d}x.$$

Or pour tout $x \in [\varepsilon; \varepsilon']$, $\frac{1}{\sqrt[2n]{\tan(x)}} \geqslant 0$. Donc par positivité de l'intégrale car $\varepsilon \leqslant \varepsilon'$,

$$L_n(\varepsilon) \geqslant Ł_n(\varepsilon').$$

Donc la fonction $\varepsilon \to L_n(\varepsilon)$ est décroissante sur $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$. Donc par le théorème de convergence monotone, on en conclut que

$$\boxed{L_n = \lim_{\varepsilon \to 0^+} L_n(\varepsilon) \text{ existe.}}$$

(c) Soient $1 \leqslant n \leqslant n'$. On a $0 \leqslant \frac{1}{2n'} \leqslant \frac{1}{2n}$. Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $0 \leqslant \tan(x) \leqslant 1$. Donc

$$0 \leqslant \sqrt[2n]{\tan(x)} \leqslant \sqrt[2n']{\tan(x)} \leqslant 1.$$

Donc par croissance de l'intégrale, car $0 \leqslant \frac{\pi}{4}$,

$$0 \leqslant K_n \leqslant K_{n'} \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

On en conclut que

$$\boxed{\text{la suite } (K_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante et majorée par } \frac{\pi}{4}.}$$

(d) Soient $1 \leqslant n \leqslant n'$. On a toujours $0 \leqslant \frac{1}{2n'} \leqslant \frac{1}{2n}$ mais pour tout $\varepsilon \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$ et pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$, $1 \leqslant \tan(x)$. Donc

$$1 \leqslant \sqrt[2n']{\tan(x)} \leqslant \sqrt[2n]{\tan(x)}.$$

Donc par croissance de l'intégrale, car $\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon$,

$$L_{n'}(\varepsilon) \leqslant L_n(\varepsilon).$$

Donc par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0^+$,

$$L_{n'} \leqslant L_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (L_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$, on a vu $1 \leqslant \sqrt[2n]{\tan(x)}$. Donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} 1 \,\mathrm{d}x \leqslant L_n(\varepsilon) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\pi}{4} - \varepsilon \leqslant L_n(ee).$$

Donc par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0^+$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{\pi}{4} \leqslant L_n.}$$

(f) Par ce qui précède, $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée et décroissante. Donc par le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{\text{la suite } (L_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L_n \geqslant \frac{\pi}{4}$ et $K_n \geqslant 0$. Donc

$$L_n + K_n \geqslant \frac{\pi}{4}.$$

D'autre part, on a vu que $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc converge également. Ainsi, par somme, $(L_n + K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et par passage à la limite,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} (K_n + L_n) \geqslant \frac{\pi}{4}.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$. Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$, posons $u = \sqrt[2n]{\tan(x)}$ i.e. $x = \arctan\left(u^{2n}\right)$ car $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Alors, $u \in \left[0; \sqrt[2n]{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)}\right] \subseteq \mathbb{R}_+$. La fonction $u \mapsto \arctan\left(u^{2n}\right)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathrm{d}x = \frac{2nu^{2n-1}}{1+u^{4n}}\,\mathrm{d}u$. Donc

$$\begin{aligned} K_n + L_n(\varepsilon) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[2n]{\tan(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sqrt[2n]{\tan(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sqrt[2n]{\tan(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\sqrt[2n]{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}} u \frac{2nu^{2n-1}}{1+u^{4n}}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall \varepsilon \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[, \qquad K_n + L_n(\varepsilon) = \int_0^{\sqrt[2n]{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}} \frac{2nu^{2n}}{1+u^{4n}}\,\mathrm{d}u.$$

Or quand $\varepsilon \to 0$, $A = \sqrt[2n]{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)} \to +\infty$. Donc par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad K_n + L_n = 2nH_n.}$$

4. On a vu précédemment que la suite $(K_n + L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Notons ℓ sa limite et posons $H = \frac{\ell}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{H_n}{1/n} = \frac{K_n + L_n}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} H \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{H_n}{H/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
Conclusion,
$$\boxed{\exists H \in \mathbb{R}, \qquad H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{H}{n}.}$$

Partie IV

1. Soit Φ la fonction définie, pour tout réel non nul x, par :
$$\Phi(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$
En reconnaissant un taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0 (ou par un mini-DL)
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1.$$
Donc par continuité de la fonction inverse en 1, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \Phi(x)$ existe et
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \Phi(x) = 1.$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{en posant } \Phi(0) = 1, \text{ la fonction } \Phi \text{ est prolongeable par continuité en } 0.}$$

Dans ce qui suit, on désigne encore par Φ la fonction ainsi prolongée. On admettra que la fonction Φ est développable en série entière sur $]-2\pi; 2\pi[$: il existe $(B_n)_{\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in]-2\pi; 2\pi[$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} B_n \frac{x^n}{n!}$ converge et
$$\forall x \in]-2\pi; 2\pi[\,, \qquad \Phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

2. Notamment en évaluant en 0, on obtient
$$\Phi(0) = \frac{B_0}{0!} + 0 = B_0.$$
Conclusion,
$$\boxed{B_0 = 1.}$$

3. On remarque que, pour tout réel x de $]-2\pi; 2\pi[$:
$$x = (\mathrm{e}^x - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!}.$$
Or on sait que pour tout $x \in]-2\pi; 2\pi[$,
$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{e}^x - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Donc en utilisant (★) avec $f = \Phi$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{B_k}{k!}$, $g : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$, $b_0 = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $b_k = \frac{1}{k!}$, on obtient que

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n \\ &= a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} + 0 \right) x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \right) x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k \right) \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $x \in]-2\pi; 2\pi[$,

$$\boxed{x = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k \right) \frac{x^n}{n!}.}$$

4. (a) Par la question précédente,

$$B_0 x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k \right) \frac{x^n}{n!} = x \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k \right) = 0.$$

Donc par l'implication (★★) on a pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0.$$

En posant $\tilde{n} = n - 1$, pour tout $\tilde{n} \geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{\tilde{n}} \binom{\tilde{n}+1}{k} B_k = 0.$$

Conclusion, Montrer à l'aide de la relation (★★) que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0.}$$

Dès lors, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\binom{n+1}{n} B_n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad (n+1) B_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k.}$$

(b) En prenant $n = 1$, on a

$$2B_1 = -\binom{2}{0} B_0 = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad B_1 = -\frac{1}{2}.$$

En prenant $n = 2$, on a

$$3B_2 = -\binom{3}{0} B_0 - \binom{3}{1} B_1 = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Donc $B_2 = \frac{1}{6}$ et

$$2B_2 = \frac{1}{3}.$$

Poursuivons, pour $n = 3$,

$$4B_3 = -\binom{4}{0} B_0 - \binom{4}{1} B_1 - \binom{4}{2} B_2 = -1 + 2 - 6 \times \frac{1}{6} = 0.$$

Donc $B_3 = 0$. Enfin, pour $n = 4$,

$$5B_4 = -\binom{5}{0} B_0 - \binom{5}{1} B_1 - \binom{5}{2} B_2 - \binom{5}{3} B_3 = -1 + \frac{5}{2} - 10 \times \frac{1}{6} - 10 \times 0 = \frac{3}{2} - \frac{5}{3} = -\frac{1}{6}.$$

D'où $B_4 = -\frac{1}{30}$. Donc

$$4B_4 = -\frac{2}{15}.$$

Conclusion,

$$\boxed{2B_2 = \frac{1}{3} = a_3 \qquad \text{et } 4B_4 = -\frac{2}{15} = -a_5.}$$

Je me refuse à dire que 3, 5, 7 étant premiers on en déduit que tous les nombres impairs le sont...

Ce problème fait intervenir des intégrales généralisées, pour lesquelles la fonction tangente permet soit d'obtenir leur convergence, soit de les calculer. Cette très classique fonction trigonométrique vérifie aussi une équation différentielle permettant d'obtenir son développement en série entière, où interviennent les nombres de Benoulli, que l'on retrouve dans de nombreux autres développements en série entière, ou encore dans la formule d'Euler Mac-Laurin, qui relie des sommes discrètes où apparaissent également les dérivées successives de la fonction, et des intégrales.

Fin du corrigé