Epreuve de Mathématiques A

Durée 3h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.
- Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.
- Une feuille, dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné, ne sera pas prise en compte.
- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Le sujet est composé de trois exercices totalement indépendants.
Il est conseillé au candidat de passer environ une heure sur chaque exercice.

Exercice 1 - Un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

On considère

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7a-5c & 3b-3d \\ -5a+7c & -3b+3d \end{pmatrix} \end{array}.$$

On admet que f est linéaire.

1. Rappeler la dimension de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On la notera $\mathscr{C}$.
2. Déterminer $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)$.
3. Déterminer le noyau de A. En déduire le noyau de f.
4. Préciser le rang de A puis une base de l'image de A. En déduire une base de l'image de f.

On pose

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

5. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
6. Pour tout $i \in [\![1;4]\!]$, calculer $f(e_i)$. En déduire $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
7. Montrer que (e_4) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$.
8. Calculer P la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$.
9. Sans calcul, préciser le lien entre A, D, P et P^{-1}.
10. Soit E un espace vectoriel. Soient p un projecteur de E et g un endomorphisme de E.
    (a) Montrer que $g \circ p = g \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(p) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$.
    (b) Montrer que $p \circ g = g \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(p)$.

Exercice 2 - Homothéties complexes

On considère

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ (a,b) & \mapsto & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. L'application φ est-elle injective ?
3. L'application φ est-elle surjective ?

On considère $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On rappelle alors que $\mathscr{C} = (1, i)$ est la base canonique de $\mathbb{C}$. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose f_{a+ib} l'endomorphisme de $\mathbb{C}$ canoniquement associé à la matrice $\varphi(a,b)$.

4. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha = a + ib$. Montrer que $f_{a+ib} = \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$.
5. A quelle condition sur α, f_α est-il un automorphisme ?
6. En déduire l'ensemble des $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $\varphi(a,b)$ est inversible.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$ et $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. Soit $F = \{ f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathbb{C}) \mid \alpha \in \mathbb{C} \}$.

7. (a) Montrer que F est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{C})$.
   (b) Montrer que pour tout $(u,v) \in F^2$, $u \circ v \in F$.
   (c) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_\alpha^k \in F$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
   (a) Déterminer l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $f_\alpha^n = f_{1+i} \circ f_\alpha$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler la formule de $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement
   (c) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ puis celle de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
   (d) En déduire l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{Im}(\varphi)$ telles que $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M$.

Exercice 3 - Probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}$. On possède $n+1$ urnes U_0, U_1, …, U_n. On remplie l'urne U_0 de deux boules rouges et deux boules vertes et toutes les urnes U_1, …, U_n de deux boules rouges. On pioche deux boules dans l'urne U_0 que l'on range dans U_1. On pioche alors deux boules dans U_1 que l'on range dans U_2. Ainsi à l'étape $k \in \mathbb{N}^*$, on pioche deux boules dans l'urne U_{k-1} que l'on met dans l'urne U_k. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules vertes obtenue dans l'urne U_n et si $n = 0$, $X_0 = 2$.

1. On pioche une boule dans U_0 et on note Y_1 la variable aléatoire retournant 1 si l'on a obtenu une verte et 0 sinon. Sans remise, on pioche une seconde boule dans U_0, on note Y_2 la variable aléatoire retournant 1 si l'on a obtenu une verte et 0 sinon.
   (a) Préciser la loi de Y_1.
   (b) Déterminer la loi de Y_2. *Le détail du calcul de $\mathbb{P}(Y_2 = 1)$ est attendu.*
   (c) Exprimer X_1 en fonction de Y_1 et Y_2.
   (d) Pourquoi ne pouvons-nous pas directement conclure que X_1 suit une loi binomiale ?
   (e) Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 2)$.
   (f) Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 0)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_{k+1} = 2 \mid X_k = 2) = \frac{1}{6}$.
   (b) Ecrire l'évènement $(X_n = 2)$ en fonction de tous les $(X_k = 2)$ pour $k \in [\![0; n]\!]$.
   (c) En déduire $\mathbb{P}(X_n = 2)$ en fonction de n.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{6}\mathbb{P}(X_n = 2)$.