# Commentaires du CCB A

Un sujet très accessible avec beaucoup de questions de cours largement valorisée par le barème. Certains étudiants ont fait de nets progrès et souvent le travail et les efforts y sont visibles. Pourtant beaucoup ont encore énormément de fragilités sur le cours et les notions élémentaires qui doivent absolument être assimilés.

## Exercice I - Un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Seule réelle difficulté de ce problème, mais non négligeable, était que nous demandions la représentation matricielle de... matrices ! Et d'un endomorphisme de matrices. Un seul moyen de bien s'en sortir : être très solide sur le cours et l'appliquer à la lettre lorsque nous sommes en difficultés. Trop ont bloqué à la question 2 ce qui compromet toute la suite. Au contraire, une fois cette subtilité compris, beaucoup de points prenables et plusieurs l'ont bien rentabilisé.

On considère

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7a-5c & 3b-3d \\ -5a+7c & -3b+3d \end{pmatrix} \end{array}.$$

On admet que $f$ est linéaire.

1. Rappeler la dimension de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On la notera $\mathscr{C}$.

   Cadeau ! Certains l'ont refusé...

2. Déterminer $A = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f)$.

   Beaucoup de bonnes réponses. A justifier a minima. Une réponse ne peut être juste une égalité, il faut détailler comment vous l'obtenez. Certains me retourne une matrice $2x2$ ou même une matrice dépendant de mystérieux $a$ et $b$.

3. Déterminer le noyau de $A$. En déduire le noyau de $f$.

   Facile a priori d'avoir eu bon à la question précédente. Un coup d'oeil sur une question suivante pouvait nous indiquer qu'il fallait trouver une droite (espace de dimension 1) ! Très peu ont compris la nuance entre $\operatorname{Ker}(A)$ et $\operatorname{Ker}(f)$. Cette nuance est importante !

4. Préciser le rang de $A$ puis une base de l'image de $A$. En déduire une base de l'image de $f$.

   Beaucoup parachutent la dimension du noyau. Citer bien le théorème en question. D'autres ont recaluler le rang directement sans s'aider de la question précédente. Cela fonctionne mais c'est plus long. La base de l'image de $A$ est plus souvent confuse. Certains parachutent 3 vecteurs et disent « tout va bien je suis content de ces trois vecteurs ». NE ME PARLER PLUS JAMAIS DE NON COLINEARITE POUR 3 VECTEURS (ou plus) ! Oui je crie, ça mérite un bien un cri. Le caractère libre dès que l'on a 3 vecteurs ou plus ne « se voit » jamais, il faut toujours une démonstration.

On pose

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

5. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   Plusieurs belles réponses. Quelques bricolages vaseux. N'oubliez pas d'utiliser la dimension puisque le cardinal ici correspond bien à la dimension de l'espace.

6. Pour tout $i \in [\![1;4]\!]$, calculer $f(e_i)$. En déduire $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

   Beaucoup plus d'erreurs que je ne pensais sur le calcul des images. Souvent le facteur 1/2 un peu caché manque. Pas mal de bonnes réponses pour $D$.

7. Montrer que $(e_4)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$.

   La rédaction laisse souvent à désirée. Notamment pour $\mathscr{B}_0$, beaucoup n'ont pas vu qu'il est nécessaire de montrer que les vecteurs de $\mathscr{B}_0$ sont dans $\mathrm{Im}(f)$. Je rappelle qu'être dans l'image n'est pas caractérisé par le fait de ne pas être dans le noyau, cela n'a rien à voir (les deux espaces n'ont aucune raison d'être en somme directe).

8. Calculer $P$ la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$.

   Facile, bien réussie.

9. Sans calcul, préciser le lien entre $A$, $D$, $P$ et $P^{-1}$.

   Encore plus facile, bien réussie.

10. Soit $E$ un espace vectoriel. Soient $p$ un projecteur de $E$ et $g$ un endomorphisme de $E$.

    (a) Montrer que $g \circ p = g \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(p) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$.
    Plusieurs belles réponses pour le sens direct. Aucun pour la réciproque qui était bien plus dure.

    (b) Montrer que $p \circ g = g \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(p)$.
    Le sens direct n'est pas plus dur que dans la question précédente mais certains ne le tentent pas.

# Exercice II - Homothéties complexes

Un problème plus dur. Généralement moins creusé. Plusieurs questions abordables.
On considère

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ (a,b) & \mapsto & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. Montrer que $\varphi$ est linéaire.

   Une très large majorité de bonnes réponses mais étonnamment bien plus de mauvaises réponses que je ne pensais. Poser bien la définition de la linéarité et ne confondez pas $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. L'application $\varphi$ est-elle injective ?

   Bien dans l'ensemble. Certains savent ce qu'il faut faire sans y parvenir.

3. L'application $\varphi$ est-elle surjective ?

   Du bon et du moins bon. Plusieurs ont bien vu directement que la dimension ne le permettait pas.

On considère $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On rappelle alors que $\mathscr{C} = (1, i)$ est la base canonique de $\mathbb{C}$. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f_{a+ib}$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}$ canoniquement associé à la matrice $\varphi(a,b)$.

4. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha = a + ib$. Montrer que $f_{a+ib} = \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$.

   Deux ou trois bonnes réponses seulement. La question n'est pas si dure en pratique. Il faut juste bien dérouler la définition de la représentation matricielle.

5. A quelle condition sur $\alpha$, $f_\alpha$ est-il un automorphisme ?

   Question pas très dure mais... pas du tout réussie. Vous êtes nombreux à savoir la définition d'être un automorphisme il suffisait de continuer à dérouler. On pouvait faire comme dans le corrigé ou chercher le noyau et/ou l'image de $f_\alpha$ si besoin.

6. En déduire l'ensemble des $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $\varphi(a,b)$ est inversible.

   Facile mais nécessite la réponse à la question précédente. Très peu traitée.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$ et $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. Soit $F = \{ f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathbb{C}) \mid \alpha \in \mathbb{C} \}$.

7. (a) Montrer que $F$ est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{C})$.

   Beaucoup beaucoup de confusions. Question moins facile qu'il n'y parait. Notamment vous n'avez pas comrpis la nécessité de la phrase suivante :

   $$f \in F \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists \alpha \in \mathbb{C},\ f = \alpha \mathrm{Id}\mathbb{C}.$$

   Notamment si on prend deux éléments $f$ et $g$ dans $F$ alors cela implique l'existence de deux complexes $\alpha$, $\beta$ distincts tels que $f = \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ et $g = \beta \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. J'ai donné les points même si la rédaction n'est pas parfaite. N'hésitez donc pas à retravailler le corrigé pour y voir la rédaction souhaitée.

   (b) Montrer que pour tout $(u,v) \in F^2$, $u \circ v \in F$.

   Même problème que ci-dessus. Certains me parachutent qu'un espace vectoriel est stable par produit. Ce qui est faut en général on ne fait pas le produit de deux vecteurs !

   (c) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_\alpha^k \in F$.

   Dire : « il suffit de généraliser la question précédente » ne suffit pas ! Une démonstration par récurrence était donc attendue.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

   (a) Déterminer l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $f_\alpha^n = f_{1+i} \circ f_\alpha$.
   Deux belles réponses. Non traitée sinon.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler la formule de $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
   Sans commentaire. C'est du cours.

   (c) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ puis celle de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
   Beaucoup ont oublié de justifier la positivité du cosinus... Je rappelle que $\cos^2(x) = a$ n'implique par forcément que $\cos(x) = \sqrt{a}$... J'en avais déjà beaucoup sanctionnés lors d'un DS du premier semestre.

   (d) En déduire l'ensemble des matrices $M \in \operatorname{Im}(\varphi)$ telles que $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M$.
   Le major s'en sort. Non traitée sinon.

# Exercice III - Probabilités

Un problème plutôt réussi. L'intuition est bonne il vous manque cependant un peu de formalisme. Il faut encore un peu gagner en rigueur, c'est nécessaire pour attaquer ensuite des problèmes plus difficiles.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On possède $n+1$ urnes $U_0$, $U_1$, ..., $U_n$. On remplie l'urne $U_0$ de deux boules rouges et deux boules vertes et toutes les urnes $U_1$, ..., $U_n$ de deux boules rouges. On pioche deux boules dans l'urne $U_0$ que l'on range dans $U_1$. On pioche alors deux boules dans $U_1$ que l'on range dans $U_2$. Ainsi à l'étape $k \in \mathbb{N}^*$, on pioche deux boules dans l'urne $U_{k-1}$ que l'on met dans l'urne $U_k$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $X_n$ le nombre de boules vertes obtenue dans l'urne $U_n$ et si $n = 0$, $X_0 = 2$.

1. On pioche une boule dans $U_0$ et on note $Y_1$ la variable aléatoire retournant 1 si l'on a obtenu une verte et 0 sinon. Sans remise, on pioche une seconde boule dans $U_0$, on note $Y_2$ la variable aléatoire retournant 1 si l'on a obtenu une verte et 0 sinon.

   (a) Préciser la loi de $Y_1$.

   Un point pour le bon résultat et... un point pour la justification ! Rédigez.

   (b) Déterminer la loi de $Y_2$. *Le détail du calcul de* $\mathbb{P}(Y_2 = 1)$ *est attendu.*

   Plusieurs belles réponses. N'oubliez pas de parler de système complet d'évènements à chaque fois que vous utilisez la formule des probabilités totales et surtout avant de remplacer certaines probabilités par leurs valeurs numériques de justifier. Par exemple $\mathbb{P}(Y_2 = 1 \mid Y_1 = 1) = 1/3$ nécessite une explication.

   (c) Exprimer $X_1$ en fonction de $Y_1$ et $Y_2$.

   Ok pour beaucoup. En justifiant c'est mieux mais je n'ai pas sanctionné ici.

   (d) Pourquoi ne pouvons-nous pas directement conclure que $X_1$ suit une loi binomiale ?

   Assez bien dans l'ensemble vous savez que l'absence d'indépendance est rédhibitoire.

   (e) Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 2)$.

   Pas toujours bien rédigée non plus mais de bonnes réponses.

   (f) Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 0)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1)$.

   N'hésitez à utiliser que $\mathbb{P}(X_1 = 1)$ vaut 1 moins la somme des autres probabilités (car ... forme un système complet...). Si vous passez par l'union précisez bien qu'elle est disjointe pour en faire la somme ensuite.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Justifier que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_{k+1} = 2 \mid X_k = 2) = \frac{1}{6}$.

   Puisque la réponse est donnée, une rédaction qui justifie proprement le résultat est nécessaire. Beaucoup ont vu que l'on pouvait se ramener à $\mathbb{P}(X_1 = 2)$ puisque les conditions étaient identiques.

   (b) Ecrire l'évènement $(X_n = 2)$ en fonction de tous les $(X_k = 2)$ pour $k \in [\![0; n]\!]$.

   Un nombre satisfaisant de bonnes réponses. Le produit d'évènements est hors sujet de même que la somme.

   (c) En déduire $\mathbb{P}(X_n = 2)$ en fonction de $n$.

   Peu de bonnes réponses. Trop souvent le résultat est parachuté ou forcé.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{6}\mathbb{P}(X_n = 2)$.

   Des éléments mais la réponse n'est pas toujours complète notamment dans la justification.