BANQUE PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques C

Durée 3h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.

- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

- Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.

- Une feuille, dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné, ne sera pas prise en compte.

- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Le sujet est composé de trois parties totalement indépendantes.

Partie I - Une équation d'ordre 3

On considère l'équation différentielle suivante:

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + y' - 2y = 0 \tag{E}$$

Avec y une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est solution sur $\mathbb{R}$ de
$$y' = 2y \tag{H_1}$$
Alors f est aussi solution de E.
2. Résoudre H_1. On note $\mathcal{S}_1$ l'ensemble des solutions de H_1.
3. Montrer que si f est solution de E sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $F = f' - 2f$ est solution sur $\mathbb{R}$ de
$$y'' + y = 0 \tag{H_2}$$
4. Résoudre H_2. On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des solutions de H_2.
5. Pour tout $(\omega, \eta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, donner la partie réelle et la partie imaginaire de:
$$\int_0^t \mathrm{e}^{(\eta + \mathrm{i}\omega)u} \mathrm{d}u$$
6. En déduire que pour tout $(\omega, \eta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,
$$\int_0^t \cos(\omega u)\mathrm{e}^{\eta u}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{\eta t}}{\eta^2 + \omega^2}\left[\eta\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)\right] - \frac{\eta}{\eta^2 + \omega^2}$$
et
$$\int_0^t \sin(\omega u)\mathrm{e}^{\eta u}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{\eta t}}{\eta^2 + \omega^2}\left[-\omega\cos(\omega t) + \eta\sin(\omega t)\right] + \frac{\omega}{\eta^2 + \omega^2}$$
7. Montrer alors que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble des primitives de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-2t}[a\cos(t) + b\sin(t)]$ s'écrit,
$$\left\{t \mapsto {}^{\mathrm{e}^{-2t}}\!/_{5}\left[(a-2b)\sin(t) - (2a+b)\cos(t)\right] + C \middle| C \in \mathbb{R}\right\}$$
8. En déduire pour tout $F \in \mathcal{S}_2$ les solutions de,
$$y' - 2y = F$$
9. En déduire que l'ensemble des solutions de E est inclus dans $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$.
10. Résoudre E.

Partie II - Une inéquation différentielle

Soient $\alpha > 0$ et $c > 0$, on considère l'inéquation différentielle suivante,

$$|y' - \alpha y| \leq c \tag{I}$$

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ vérifiant $f'(t) - \alpha f(t) \leq c$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

1. On pose $g : t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $g'(t) \leq c\mathrm{e}^{-\alpha t}$.

2. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$f(t) \leq \left(f(0) + \frac{c}{\alpha}\right) \mathrm{e}^{\alpha t} - \frac{c}{\alpha}$$
3. De quel problème de Cauchy la fonction $t \mapsto \left(f(0) + \frac{c}{\alpha}\right) \mathrm{e}^{\alpha t} - \frac{c}{\alpha}$ est-elle solution ?

On considère maintenant f une solution de I sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$\left(f(0) - \frac{c}{\alpha}\right) \mathrm{e}^{\alpha t} + \frac{c}{\alpha} \leq f(t) \leq \left(f(0) + \frac{c}{\alpha}\right) \mathrm{e}^{\alpha t} - \frac{c}{\alpha}$$
5. On suppose dans cette question que $f(0) = {}^{c}/_{\alpha}$. Tracer la zone du plan dans laquelle le graphe de f peut évoluer.
6. On suppose dans cette question que $f(0) < -{}^{c}/_{\alpha}$. Tracer la zone du plan dans laquelle le graphe de f peut évoluer.

Partie III - Une équation différentielle non linéaire

On cherche à montrer qu'il existe des solutions à l'équation différentielle
$$y' = \arctan(y)\sqrt{y} + 1 \tag{1}$$
Où y est une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On pose F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(t) = \arctan(t)\sqrt{t} + 1$.

Sous-partie a - étude de F

1. Montrer que pour tout $t \in [0; 1]$, $\arctan(t) \leq t \leq \sqrt{t}$.
2. Montrer que pour tout $t \in [1; +\infty[$, $\arctan(t) \leq \sqrt{t}$.
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{t}(1 + t^2)^{-1} \leq 1$. On pourra disjoindre les cas entre $t \geq 1$ et $t \leq 1$.
4. Calculer $\int_0^{\pi/2} F(t)\mathrm{d}t$. (on pourra poser $t = u^2$)
5. Montrer que F est dérivable en 0 et donner $F'(0)$.
6. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $F'(t) \leq {}^{3}/_{2}$.
7. Montrer que pout tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+$,
$$|F(x) - F(y)| \leq \frac{3}{2} |x - y| \tag{2}$$

Sous-partie b - Construction d'une suite de fonction

Pour tout $n \geq 0$ on définit par récurrence la fonction $g_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ par:
$$g_0 = \mathrm{Id} \quad \text{et} \quad \mathrm{g_{n+1}(t)} = \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{F} \circ \mathrm{g_n(u)du}, \forall \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+$$
1. Justifier que pour tout $n \geq 0$, g_n est bien de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Pour tout $n \geq 0$ et pour tout $\epsilon > 0$, justifier l'existence de $A \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $t \in [0; \epsilon]$,
$$|g_{n+1}(t) - g_n(t)| \leq A$$

Pour les questions suivantes on fixe $\epsilon > 0$ et $t \in [0; \epsilon]$. Et on pose $M_{n,\epsilon} = \sup_{[0;\epsilon]}(|g_{n+1} - g_n|) \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que pour tout $n \geq 1$,
$$|g_{n+1}(t) - g_n(t)| \leq \frac{3}{2} \times \epsilon \times M_{n-1,\epsilon}$$

4. Montrer alors par récurrence que pour tout $n \geq 0$,
$$|g_{n+1}(t) - g_n(t)| \leq \left[\frac{3}{2} \times \epsilon\right]^n \times M_{0,\epsilon}$$

5. Soit $n \geq 0$, donner la valeur de,
$$\sum_{k=0}^{n} \left[\frac{3}{2} \times \epsilon\right]^k$$

6. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} |g_{k+1}(t) - g_k(t)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

On se replace dans le cas général.

7. Montrer alors qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [0;\epsilon]$, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} |g_{k+1}(t) - g_k(t)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, puis en déduire qu'elle converge.

Sous-partie c - Convergence de $g_n(t)$

On considère dans cette partie une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{k=0}^{n} |u_k|$ converge quand n tend vers $+\infty$ vers une limite $L \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \geq 0$, $T_n = L - \sum_{k=0}^{n} |u_k|$. On définit pour tout $n \geq 0$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sup_{k\geq n}(S_k)$ et $W_n = \inf_{k\geq n}(S_k)$.

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} T_n = 0$.
2. Justifier que pour tout $n \geq 0$, $|S_n| \leq L$.
3. En déduire que pour tout $n \geq 0$, W_n et V_n sont des réels compris entre $-L$ et L.
4. Pour tout $n \geq 0$, montrer que $V_n = \max(S_n, V_{n+1})$.
5. En déduire que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On admet que l'on montre de même que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
6. Pour tout $n \geq 0$ pour tout $p \geq n+1$,
$$\sum_{k=n+1}^{p} |u_k| \leq T_n$$
7. Pour tout $n \geq 0$, montrer que,
$$V_n \leq S_n + T_n \quad \text{et} \quad \mathrm{W_n \geq S_n - T_n}.$$
8. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} V_n - W_n = 0$.
9. Conclure que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$.
10. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = l$.
11. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [0;\epsilon]$, la suite $(g_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On admet alors que la fonction $t \in [0,\epsilon] \mapsto \lim_{n\to+\infty} g_n(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et est solution de l'équation différentielle considérée sur $[0;\epsilon]$. On peut de la même manière construire une solution sur $\mathbb{R}$.