I.1 Soit f une solution de (H_1) sur $\mathbb{R}$, alors:

$$f^{(3)} - 2f^{(2)} + f' - 2f = (f' - 2f)^{(2)} + (f' - 2f) = 0 + 0 = 0$$

Ainsi, f est aussi solution de (E).

I.2 (H_1) est une équation différentielle linéaire à coefficients constant. L'ensemble de es solutions sur $\mathbb{R}$ est donc:

$$\mathcal{S}_1 = \left\{t \mapsto \lambda \mathsf{e}^{2t} | \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

I.3 Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et $F = f' - 2f$, alors:

$$\begin{aligned} F'' + F &= (f' - 2f)^{(2)} + (f' - 2f) \\ &= f^{(3)} - 2f^{(2)} + f' - 2f \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc, F est solution de (H_2).

I.4 (H_2) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficient constants. Son équation caractéristique est:

$$X^2 + X = 0$$

Cette équation n'admet pas de racines réelles. Les racines complexes sont $+\mathrm{i}$ et $-\mathrm{i}$. Ainsi l'ensemble des solutions réelles est:

$$\mathcal{S}_2 = \left\{t \mapsto A\cos(t) + B\sin(t) | (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

I.5 Soient ω et η deux réels non tous nuls, et $t \in \mathbb{R}$. Comme $\eta + \mathrm{i}\omega \neq 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathsf{e}^{(\eta + \mathrm{i}\omega)u} \mathsf{d}u &= \left[\frac{1}{\eta + i\omega} \mathsf{e}^{(\eta + i\omega)u}\right]_0^t \\ &= \frac{1}{\eta + i\omega} \mathsf{e}^{(\eta + i\omega)t} - \frac{1}{\eta + i\omega} \\ &= \frac{\eta - \mathrm{i}\omega}{\eta + i\omega} \mathsf{e}^{(\eta + i\omega)t} - \frac{\eta - \mathrm{i}\omega}{\eta + i\omega} \\ &= \frac{\mathsf{e}^{\eta t}}{\eta^2 + \omega^2} \left[\eta\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t) + \mathrm{i}\eta\sin(\omega t) - \mathrm{i}\omega\cos(\omega t)\right] - \frac{\eta - \mathrm{i}\omega}{\eta^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Ainsi:

$$\mathrm{Re}\left(\int_0^t \mathsf{e}^{(\eta + \mathrm{i}\omega)u} \mathsf{d}u\right) = \frac{\mathsf{e}^{\eta t}}{\eta^2 + \omega^2} \left(\eta\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)\right) - \frac{\eta}{\eta^2 + \omega^2}$$

et,

$$\mathrm{Im}\left(\int_0^t \mathsf{e}^{(\eta + \mathrm{i}\omega)u} \mathsf{d}u\right) = \frac{\mathsf{e}^{\eta t}}{\eta^2 + \omega^2} \left(\eta\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)\right) + \frac{\omega}{\eta^2 + \omega^2}$$

I.6 Soient ω et η deux réels non tous nuls, et $t \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{Re}\left(\int_0^t \mathsf{e}^{(\eta + \mathrm{i}\omega)u} \mathsf{d}u\right) = \int_0^t \cos(\omega u)\mathsf{e}^{\eta u} du \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(\int_0^t \mathsf{e}^{(\eta + \mathrm{i}\omega)u} \mathsf{d}u\right) = \int_0^t \sin(\omega u)\mathsf{e}^{\eta u} du$$

D'après la question précédente on a donc:

$$\int_0^t \cos(\omega u)\mathsf{e}^{\eta u} \mathsf{d}u = \frac{\mathsf{e}^{\eta t}}{\eta^2 + \omega^2} \left(\eta\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)\right) - \frac{\eta}{\eta^2 + \omega^2}$$

et,

$$\int_0^t \sin(\omega u)\mathsf{e}^{\eta u} \mathsf{d}u = \frac{\mathsf{e}^{\eta t}}{\eta^2 + \omega^2} \left(\eta\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)\right) + \frac{\omega}{\eta^2 + \omega^2}$$

I.7 D'après la question précédente, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^t a\cos(u)\mathsf{e}^{-2u} + b\sin(u)\mathsf{e}^{-2u}\mathsf{d}u = a\frac{\mathsf{e}^{-2t}}{2^2+1}\left[-2\cos(t)+\sin(t)\right] + b\frac{\mathsf{e}^{-2t}}{2^2+1}\left[-\cos(t)-2\sin(t)\right] + \frac{2a+b}{2^2+1}$$
$$= \frac{\mathsf{e}^{-2t}}{5}\left[(-2a-b)\cos(t)+(a-2b)\sin(t)\right] + \frac{2a+b}{5}$$

Ainsi, d'après le théorème fondamental de l'analyse, une primitive de $t \mapsto a\cos(u)\mathsf{e}^{-2u} + b\sin(u)\mathsf{e}^{-2u}$ est donnée par,

$$t \mapsto \frac{\mathsf{e}^{-2t}}{5}\left[(-2a-b)\cos(t)+(a-2b)\sin(t)\right] + \frac{2a+b}{5}$$

Comme toutes les primitives diffèrent d'une constante, l'ensemble des primitives de la fonction est,

$$\left\{t \mapsto \frac{\mathsf{e}^{-2t}}{5}\left[(-2a-b)\cos(t)+(a-2b)\sin(t)\right] + C | C \in \mathbb{R}\right\}$$

I.8 Soit $f \in \mathcal{S}_2$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$$

On condière l'équation:

$$y' - 2y = F$$

L'ensembles des solutions homogènes est:

$$\left\{t \mapsto \lambda\mathsf{e}^{2t} | \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Pour trouver une solution particulière on applique la méthode de variation de la constante. Considérons $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors la fonction $t \mapsto \lambda(t)\mathsf{e}^{2t}$ est solutions de l'équation considérée si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left(\lambda(t)\mathsf{e}^{2t}\right)' - 2\lambda(t)\mathsf{e}^{2t} = F(t)$$

Si et seulement si

$$\lambda(t)'\mathsf{e}^{2t} + 2\lambda(t)\mathsf{e}^{2t} - 2\lambda(t)\mathsf{e}^{2t} = F(t)$$

Si et seulement si

$$\lambda(t)' = F(t)\mathsf{e}^{-2t}$$

Ainsi, il faut et il suffit que λ soit une primitive de $t \mapsto (a\cos(t)+b\sin(t))\mathsf{e}^{-2t}$. D'après la question précédente on peut choisir,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda(t) = \frac{\mathsf{e}^{-2t}}{5}\left[(-2a-b)\cos(t)+(a-2b)\sin(t)\right]$$

Ainsi, une solution particulière est,

$$P : t \mapsto \frac{1}{5}\left[(-2a-b)\cos(t)+(a-2b)\sin(t)\right]$$

Ainsi l'ensemble des solution de l'équation est:

$$\left\{t \mapsto \lambda\mathsf{e}^{2t} + P(t) | \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

I.9 En reprenant les notations de la question précédente, on remarque que P est solution de (H_2) en tant que combinaison linéaire de cosinus et sinus. De plus pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \lambda\mathsf{e}^{2t}$ est solution de (H_1). Donc $\left\{t \mapsto \lambda\mathsf{e}^{2t} + P(t) | \lambda \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_1$. Or on a montré à la question 3 que si f est solution de (E), alors, $f' - 2f$ est solutions de (H_2), et donc $f \in \left\{t \mapsto \lambda\mathsf{e}^{2t} + P(t) | \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Ainsi l'ensemble des solutions de (E) est bien inclu dans $\mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_1$.

I.10 Réciproquement, soit $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in \mathcal{S}_1$ et $f_2 \in \mathcal{S}_2$. Alors d'après la question 1, f_1 est aussi solution de (E). De plus

$$f_2^{(3)} - 2f_2^{(2)} + f_2' - 2f_2 = \left(f_2'' + f_2\right)' - 2\left(f_2'' + f_2\right) = 0$$

Donc f_2 est aussi solution de (E). Comme (E) est homogène, le principe de superposition montre que la somme de deux solutions est solution. Ainsi, f est solution de E.

On a donc montré par double inclusion que l'ensemble des solutions de E était $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$.

II.1 Soit $t \in \mathbb{R}_+$,

$$g'(t) = f'(t)\mathsf{e}^{-\alpha t} - \alpha f(t)\mathsf{e}^{-\alpha t} = (f'(t) - \alpha f(t))\,\mathsf{e}^{-\alpha t}$$

Or $f'(t) - \alpha f(t) \leq c$ et $\mathsf{e}^{-\alpha t} \leq 0$, donc

$$(f'(t) - \alpha f(t))\,\mathsf{e}^{-\alpha t} \leq c\mathsf{e}^{-\alpha t}$$

II.2 Soit $t \in \mathbb{R}_+$, par croissance de l'intégrale on peut intégré l'inégalité précédente entre 0 et t,

$$\begin{aligned}
& \int_0^t g'(u)\mathsf{d}u \leq \int_0^t c\mathsf{e}^{-\alpha u}\mathsf{d}u \\
\Leftrightarrow \quad & g(t) - g(0) \leq \frac{c}{\alpha} - \frac{c}{\alpha}\mathsf{e}^{-\alpha t} \\
\Leftrightarrow \quad & f(t)\mathsf{e}^{-\alpha t} - f(0) \leq \frac{c}{\alpha} - \frac{c}{\alpha}\mathsf{e}^{-\alpha t} \\
\Leftrightarrow \quad & f(t)\mathsf{e}^{-\alpha t} \leq f(0) + \frac{c}{\alpha} - \frac{c}{\alpha}\mathsf{e}^{-\alpha t} \\
\Leftrightarrow \quad & f(t) \leq \left(f(0) + \frac{c}{\alpha}\right)\mathsf{e}^{\alpha t} - \frac{c}{\alpha}
\end{aligned}$$

II.3 La fonction $h : t \mapsto \left(f(0) + \frac{c}{\alpha}\right)\mathsf{e}^{\alpha t} - \frac{c}{\alpha}$ est solution du problème de Cauchy suivant,

$$\begin{cases} y' - y = 0 \\ y(0) = f(0) \end{cases}$$

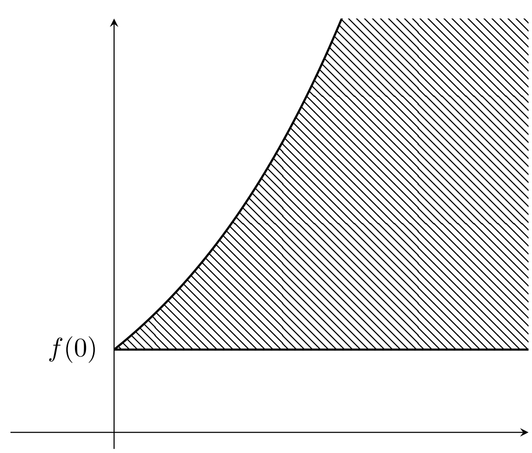
II.4 Comme f est solution de (I), pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $f'(t) - \alpha f(t) \leq c$ et donc la quesiton 2 montre que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$f(t) \leq \left(f(0) + \frac{c}{\alpha}\right)\mathsf{e}^{\alpha t} - \frac{c}{\alpha}$$

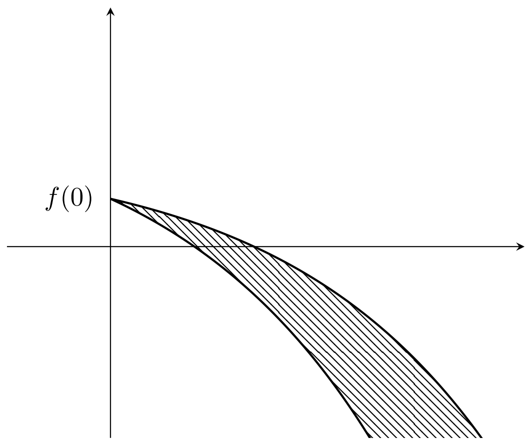
De plus pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f'(t) - \alpha f(t) \geq -c$ et donc $(-f)'(t) - \alpha(-f)(t) \leq c$, ainsi,

$$-f(t) \leq \left(-f(0) + \frac{c}{\alpha}\right)\mathsf{e}^{\alpha t} - \frac{c}{\alpha} \Leftrightarrow f(t) \geq \left(f(0) - \frac{c}{\alpha}\right)\mathsf{e}^{\alpha t} + \frac{c}{\alpha}$$

II.3



II.3



III.a.1 La fonction $f : t \mapsto \arctan(t) - t$ est dérivable sur l'intervalle $[0;1]$ et pour tout $t \in [0;1]$ $f'(t) = \frac{1}{1+t^2} - 1 \leq 0$, donc f est décroissante sur $[0;1]$, comme $f(0) = 0$, f est néagative sur $[0;1]$. Ainsi pour tout $t \in [0;1]$, $\arctan(t) \leq t$. De plus comme $t \in [0;1]$, $\sqrt{t} \leq t$.

III.a.2 On considère $f : t \mapsto \arctan(t) - \sqrt{t}$. Cette fonction est dérivable sur $[1;+\infty[$ et pour tout $t \geq 1$,

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

Or, comme $t \geq 1$, $\sqrt{t} \leq t$ et donc $-{}^1/\sqrt{t} \leq -\frac{1}{t}$. Ainsi,

$$f'(t) \leq \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{2t} = \frac{-(1+t)^2}{1+t^2} \leq 0$$

Donc f est décroissante sur $[1;+\infty[$, comme de plus $f(1) = \frac{\pi}{4} - 1 \leq 0$, f est négative sur $[1;+\infty[$. Ainsi pour tout $t \geq 1$,

$$\arctan(t) \leq \sqrt{t}$$

III.a.3 Soit $t \in [0;1]$, alors $\sqrt{t} \leq 1$ et donc $\sqrt{t} \leq 1+t^2$. Si $t \geq 1$, alors $\sqrt{t} \leq t^2$ et donc $\sqrt{t} \leq 1+t^2$. Dans tous les cas $\sqrt{t}(1+t^2)^{-1} \leq 1$.

III.a.4

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} F(t)\mathsf{d}t &= \int_0^{\pi/2} \arctan(t)\sqrt{t} + 1\mathsf{d}t \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} (\arctan(u^2)u + 1)2u\mathsf{d}u \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \arctan(u^2)2u^2\mathsf{d}u + \int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2u\mathsf{d}u \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \arctan(u^2)2u^2\mathsf{d}u + \pi/2 \\
&= \left[\frac{2}{3}\arctan(u^2)u^3\right]_0^{\sqrt{\pi/2}} - \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{2}{3}\frac{2u}{1+u^4}u^3\mathsf{d}u + \pi/2 \\
&= \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{u^4}{1+u^4}\mathsf{d}u + \pi/2 \\
&= \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 1 - \frac{1}{1+u^4}\mathsf{d}u + \pi/2 \\
&= \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}\sqrt{\pi/2} + \frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{1}{1+u^4}\mathsf{d}u + \pi/2
\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{1}{1+u^4} = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}u-2}{u^2-\sqrt{2}u+1} - \frac{1}{4}\frac{-\sqrt{2}u-2}{u^2+\sqrt{2}u+1}$$

On calcule séparément les intégrales.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{\sqrt{2}u-2}{u^2-\sqrt{2}u+1}\mathsf{d}u &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{2u-2\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1}\mathsf{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{2u-\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1} - \frac{\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1}\mathsf{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln(u^2-\sqrt{2}u+1)\right]_0^{\sqrt{\pi/2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1}\mathsf{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{\pi}+1\right) - \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{1}{u^2-\sqrt{2}u+1}\mathsf{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{\pi}+1\right) - \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{2}{\left(\sqrt{2}u-1\right)^2+1}\mathsf{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{\pi}+1\right) - \left[\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}u-1)\right]_0^{\sqrt{\pi/2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{\pi}+1\right) - \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{\pi}-1\right) + \sqrt{2}\arctan(-1)
\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{-\sqrt{2}u-2}{u^2+\sqrt{2}u+1}\mathsf{d}u &= \frac{-1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{2u+2\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}\mathsf{d}u \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1} + \frac{\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}\mathsf{d}u \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2}}\left[\ln(u^2+\sqrt{2}u+1)\right]_0^{\sqrt{\pi/2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}\mathsf{d}u \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{\pi}+1\right) - \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\mathsf{d}u \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{\pi}+1\right) - \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{2}{\left(\sqrt{2}u+1\right)^2+1}\mathsf{d}u \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{\pi}+1\right) - \left[\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}u+1)\right]_0^{\sqrt{\pi/2}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{\pi}+1\right) - \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{\pi}+1\right) + \sqrt{2}\arctan(1)
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} F(t)\mathsf{d}t = \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}\sqrt{\pi/2} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{\pi}+1\right) + \frac{1}{3\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{\pi}+1\right) \\
+ \frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\sqrt{\pi}-1\right) + \frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\sqrt{\pi}+1\right) + \pi/2
\end{aligned}$$

III.a.5 Pour tout $t > 0$,

$$\frac{F(t)-F(0)}{t} = \frac{\arctan(t)\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}}(t+o(t)) = \sqrt{t} + o)\sqrt{t}$$

Donc $\lim_{t\to 0} \frac{F(t)-F(0)}{t} = 0$ et donc F est dérivable en 0 et sa dérivée y est 0.

III.a.6 $F'(0) \leq 3/2$. Si maintenant $t > 0$,

$$F'(t) = \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} + \frac{\arctan(t)}{2\sqrt{t}} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Où l'on a utilisé les majorations des questions 1,2 et 3.

III.a.7 Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, F est dérivable sur $]x, y[$ et continue sur $[x, y]$ de plus pour tout $t \in]x, y[$, $0 \leq F'(t) \leq 3/2$, et donc $|F'(t)| \leq 3/2$, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$|F(x) - F(y)| \leq \frac{3}{2}|x - y|$$

III.b.1 On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété, $P_n : g_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Initialisation: L'identité est bien de classe $\mathcal{C}^1$.

Hérédité: Considérons P_n vraie pour un certain $n \geq 0$. Alors, g_n est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, comme de plus F est continue sur $\mathbb{R}_+$, alors $F \circ g$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions continues. Ainsi, le théorème fondamental de l'analyse montre que g_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^1$.

On a donc montré que P_n était vraie pour tout n.

III.b.2 Soit $n \geq 0$ on a démontré à la question précédente que g_{n+1} et g_n étaient continues sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $g_{n+1} - g_n$ est continue sur le segment $[0; \epsilon]$ pour tout $\epsilon > 0$, ainsi le théorème des bornes montre que $g_{n+1} - g_n$ est bornée. D'où l'existence de A tel que pour tout $t \in [0; \epsilon]$,

$$|g_{n+1}(t) - g_n(t)| \leq A$$

III.b.3 Soit $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
|g_{n+1}(t) - g_n(t)| &= \left|\int_0^t F(g_n(u)) - F(g_{n-1}(u))\, \mathsf{d}u\right| \\
&\leq \int_0^t |F(g_n(u)) - F(g_{n-1}(u))|\, \mathsf{d}u
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire. De plus d'après la question III.a.7,

$$\begin{aligned}
\int_0^t |F(g_n(u)) - F(g_{n-1}(u))|\, \mathsf{d}u &\leq \int_0^t \frac{3}{2}|g_n(u) - g_{n-1}(u)|\, \mathsf{d}u \\
&\leq \int_0^t \frac{3}{2} M_{n-1,\epsilon} \mathsf{d}u \\
&= \frac{3}{2} M_{n-1,\epsilon} t \\
&\leq \frac{3}{2} M_{n-1,\epsilon} \epsilon
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$|g_{n+1}(t) - g_n(t)| \leq \frac{3}{2} M_{n-1,\epsilon} \epsilon$$

III.b.4 On va alors montrer par récurrence la propriété $P_n : |g_{n+1}(t) - g_n(t)| \leq \left(\frac{3}{2}\epsilon\right)^2 M_{0,\epsilon}$.

Initialisation: Par définition de $M_{0,\epsilon}$, P_0 est vraie.

Hérédité: Considérons $n \geq 0$ tel que P_n est vraie. Alors pour tout $t \in [0; \epsilon]$

$$|g_{n+1}(t) - g_n(t)| \leq \left(\frac{3}{2}\epsilon\right)^2 M_{0,\epsilon}$$

Et donc $\left(\frac{3}{2}\epsilon\right)^2 M_{0,\epsilon}$ est un majorant de $|g_{n+1}-g_n|$ et donc est supérieur à son sup. Donc $M_{n,\epsilon} \leq \left(\frac{3}{2}\epsilon\right)^2 M_{0,\epsilon}$. Ainsi, d'après la question précédente:

$$|g_{n+2}(t)-g_{n+1}(t)| \leq \frac{3}{2}M_{n,\epsilon}\epsilon \leq \left(\frac{3}{2}\epsilon\right)^{n+1} M_{n,\epsilon}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

On a donc montré par récurrence que P_n est vraie pour tout n.

III.b.5 Pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{2}\epsilon\right)^k = \frac{1-\left(\frac{3}{2}\epsilon\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}\epsilon}$$

III.b.6 Pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n+1}|g_{k+1}(t)-g_k(t)| - \sum_{k=0}^{n}|g_{k+1}(t)-g_k(t)| = |g_{n+2}(t)-g_{n+1}(t)| \geq 0$$

Donc la suite est croissante.

III.b.7 D'après les question 4 et 5, pour tout $\epsilon > 0$ et pourtout $t \in [0;\epsilon]$,

$$\sum_{k=0}^{n}|g_{k+1}(t)-g_k(t)| \leq M_{0,\epsilon}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{2}\epsilon\right)^k \leq M_{0,\epsilon}\frac{1-\left(\frac{3}{2}\epsilon\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}\epsilon}$$

Or, si $\frac{3}{2}\epsilon < 1$, $\frac{1-\left(\frac{3}{2}\epsilon\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}\epsilon}$ converge et est inférieur à sa limite L. Dans ce cas, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n}|g_{k+1}(t)-g_k(t)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante d'après la question précédente et majorée par $LM_{0,\epsilon}$, elle converge donc d'après le théorème de convergence monotone. Ainsi la convergence recherchée à lieue si $\epsilon < \frac{2}{3}$.

III.c.1 En passant à la limite T_n converge vers $L-L=0$.

III.c.2 Pour tout $n \geq n$,

$$|S_n| = \left|\sum_{k=0}^{n}u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n}|u_k|$$

Or la suite $\left(\sum_{k=0}^{n}|u_k|\right)_{n\geq 0}$ est croissante et donc inférieure à sa limite L. Donc,

$$|S_n| \leq L$$

III.c.3 Ainsi, pour tout $n \geq 0$, et pour tout $k \geq 0$, $-L \leq S_n \leq L$. Donc le sup et l'inf de l'ensemble des S_k pour $k \geq n$ sont compris entre $-L$ et L.

III.c.4 Pour tout $n \geq 0$, si $S_n \geq V_{n+1}$, alors $S_n \geq S_k$ pour tout $k > n$ et donc S_n est un majorant de $\{S_k | k \geq n\}$ donc $S_n = \max\{S_k | k \geq n\} = V_n$, si $S_n < V_{n+1}$, V_{n+1} majore $\{S_k | k \geq n\}$ et par définition un majorant de cet ensemble est aussi un majorant de $\{S_k | k > n\}$ donc est supérieur à V_{n+1} d'où $V_{n+1} = V_n$. Dans les deux cas,

$$V_n = \max(S_n, V_{n+1})$$

III.c.5 Ainsi $V_n \geq V_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$ et donc $(V_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

III.c.6 Pour tout $n \geq 0$ et pour tout $p \geq n+1$,

$$\sum_{k=n+1}^{p}|u_k| = \sum_{k=0}^{p}|u_k| - \sum_{k=0}^{n}|u_k| \leq L - \sum_{k=0}^{n}|u_k| \leq T_n$$

III.c.7 Pour tout $n \geq 0$ et pour tout $k \geq n$,

$$S_k = S_n + \sum_{l=n+1}^{k}u_l \leq S_n + \sum_{l=n+1}^{k}|u_l| \leq S_n + T_n$$

Donc $S_n + T_n$ majore $\{S_k | k \geq n\}$ et donc $V_n \leq S_n + T_n$. De même, avec les mêmes notations,

$$S_k = S_n + \sum_{l=n+1}^{k} u_l \geq S_n - \sum_{l=n+1}^{k} |u_l| \geq S_n - T_n$$

Donc $S_n - T_n$ minore $\{S_k | k \geq n\}$ et donc $W_n \geq S_n - T_n$.

III.c.8 Pour tout $n \geq 0$, $V_n - W_n \geq 0$ par définition du sup et de l'inf. D'après la question précédente,

$$0 \leq V_n - W_n \leq S_n + T_n - (S_n - T_n) \leq 2T_n$$

Comme $T_n \to 0$, par encadrement $V_n - W_n \to 0$.

III.c.10 (V_n) et (W_n) sont donc deux suites croissante et décroissantes dont la différence tend vers 0, elles sont donc adjacentes et leur différence tend vers 0.

III.c.11 Par définition, pour tout $n \geq 0$, $W_n \leq S_n \leq V_n$, par encdrement (théorème des gendarmes) $V_n \to l$.

III.c.12 On a donc montré que pour toute suite réelle, si $\sum_{k=0}^{n} |u_k|$ converge, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge. Hors, dans la partie précédente on a montré qu'il existait $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [0; \epsilon]$, la suite, $\sum_{k=0}^{n} |g_{k+1}(t) - g_k(t)|$ converge. Alors pour tout $t \in [0; \epsilon]$, $\sum_{k=0}^{n} g_{k+1}(t) - g_k(t)$ converge. Or par téléscopage,

$$\sum_{k=0}^{n} g_{k+1}(t) - g_k(t) = g_{n+1}(t) - g_0(t)$$

Donc $g_{n+1}(t) - g_0(t)$ converge et donc $g_n(t)$ converge.