Epreuve de mathématiques 4
2022-2023

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Equations complexes

Soient A, B, C, I, O les points d'affixe respectivement $z_A = 1 - i$, $z_B = \sqrt{2}i$, $z_C = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right) i$, $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ et $Z_O = 0$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \left\{\sqrt{2}i\right\}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\sqrt{2}i\right\}, \qquad f(z) = \frac{z - 1 + i}{z - \sqrt{2}i}.$$

1. Préciser la forme polaire de z_A et de z_B.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+i)\, z + 2 + 2i = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{10} - (1+i)\, z^5 + 2 + 2i = 0$.
4. Justifier que A s'obtient à partir de B par une rotation de centre C dont on déterminera l'angle.
5. (a) Montrer que $f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) = \left\{ \left(\sqrt{2} + 1 + i\right) y \in \mathbb{C} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$.
   (b) On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points dont l'affixe est dans $f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$. Vérifier que O, I et C sont des points de $\mathcal{D}$.
   (c) Montrer que pour $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\sqrt{2}i\right\}$, on a $z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) \;\Leftrightarrow\; |z - z_A| = |z - z_B|$.
   (d) En déduire à quel ensemble géométrique correspond $\mathcal{D}$ par rapport à $[AB]$.
6. Montrer que $ACBO$ est un losange.
7. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $-\sqrt{2}i\, \mathrm{e}^{i\theta} + 1 - i = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{3\pi}{8}\right)}$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que

$$f^{\leftarrow}(\mathbb{U}_n) = \left\{ \sqrt{2} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}} \;\middle|\; k \in [\![1; n-1]\!] \right\}.$$

Problème 2 - Calcul d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1;1[$, on définit

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{1}{\left(1 - t^2\right)^{n/2}} \,\mathrm{d}t.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier avec soin que la fonction F_n est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;1[$ et préciser sa dérivée.
2. Calculer F_0.
3. Calculer F_1.
4. Calculer les primitives de F_1.
5. Calculer F_2.
6. Justifier que l'intégrale

$$I = \int_0^{\ln(3/2)} \frac{1}{2 - \mathrm{e}^u} \,\mathrm{d}u.$$

   existe puis, à l'aide du changement de variable $t = \mathrm{e}^u - 1$ et de la question précédente, la calculer.
7. Justifier que pour tout $x \in]-1;1[$, $\tan(\arcsin(x))$ existe puis montrer que

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad \tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

8. A l'aide du changement de variable $t = \sin(u)$, calculer F_3.

Problème 3 - Equations différentielles

On s'intéresse à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E)\ :\qquad \forall x \in \left]-1;1\right[,\qquad \left(1-x^2\right)y''(x) - xy'(x) + y(x) = x.$$

*Sauf mention contraire, on donnera pour solutions les fonctions à valeurs **réelles**.*

Partie 1 : Une équation d'ordre 2

On considère l'équation différentielle

$$(F)\ :\qquad \forall x \in \mathbb{R},\qquad y''(x) + y(x) = x^3 + 7x + 1 + 5\sin(x).$$

1. Justifier proprement que l'équation

$$(\mathscr{P})\ :\ \begin{cases} y \text{ solution de } (F) \\ y(0) = 1/2,\ y'(0) = -3/2 \end{cases}$$

est un problème de Cauchy. Que peut-on en déduire ?

2. Préciser (F_0) l'équation homogène associée à (F) et résoudre (F_0) dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.
Dans chaque cas, on écrira l'ensemble solution sous forme ensembliste et sous forme de Vect.
3. Résoudre

$$(F_1)\ :\qquad \forall x \in \mathbb{R},\qquad y''(x) + y(x) = x^3 + 7x + 1.$$

4. Déterminer l'ensemble des fonctions complexes solutions de

$$(F_2)\ :\qquad \forall x \in \mathbb{R},\qquad y''(x) + y(x) = \mathrm{e}^{ix}.$$

5. En déduire l'ensemble des fonctions réelles solutions de

$$(F_3)\ :\qquad \forall x \in \mathbb{R},\qquad y''(x) + y(x) = \sin(x).$$

6. En déduire l'ensemble des solutions de (F).
7. Résoudre $(\mathscr{P})$.

Partie 2 : Une équation d'ordre 1

8. Justifier que $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2+2x+2}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les déterminer.

On admet dans la suite le résultat suivant établi dans le problème 2 :
la fonction $G : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ est une primitive de $g : x \mapsto \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$ sur $\left]-1;1\right[$.

On fixe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle

$$(G_{\alpha,\beta})\ :\qquad \forall x \in \left]-1;1\right[,\qquad \left(1-x^2\right)y'(x) + xy(x) = \alpha\frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}x^3}{x^2+2x+2} + \beta.$$

9. Justifier que $(G_{\alpha,\beta})$ admet des solutions sur $\left]-1;1\right[$.
10. Préciser (G_0) l'équation différentielle homogène associée à $(G_{\alpha,\beta})$ et la résoudre.
On écrira l'ensemble solution sous forme ensembliste et sous forme de Vect.
11. Déterminer $\mathscr{S}_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des solutions de $(G_{\alpha,\beta})$.
12. Vérifier que lorsque $\alpha = 0$, on a $\mathscr{S}_{0,\beta} = \left\{ \begin{array}{rcl} \left]-1;1\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta x + C\sqrt{1-x^2} \end{array} \middle|\ C \in \mathbb{R} \right\}$.

Partie 3 : Fini de rire

Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]-1;1[$. On pose alors

$$\forall x \in]-1;1[\,, \qquad v(x) = \left(1-x^2\right) y'(x) + xy(x).$$

13. Préciser (E_0) l'équation homogène associée à (E).
14. Justifier que v est une fonction dérivable et calculer sa dérivée.
15. En déduire l'ensemble des solutions de (E_0).

Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]-1;1[$. On pose alors

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \qquad z(t) = y\left(\sin(t)\right).$$

16. Justifier que z est une fonction deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
17. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle que l'on reconnaîtra.
18. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
19. Comparer aux solutions de (E_0) : quel lien bien connu dans le cas des équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants retrouve-t-on entre les solutions homogènes et celles de (E) ?