# Commentaires du DS4
# Complexes, Calcul d'intégrales, Equations différentielles

Un DS d'un niveau plus élevé que les précédents, il fallait s'y attendre nous rentrons dans le dur de la première année, les suivants seront d'un niveau comparable. La classe se retrouve divisée en deux. Une tête de classe très solide qui a compris comment assimiler toutes les méthodes classiques et qui engrange proprement les points par une restitution rigoureuse. A l'autre extrémité on retrouve des copies dans lesquelles l'apprentissage superficielle des exercices classiques ou même du cours entraînent des lacunes de plus en plus importantes, les empêchent de plus en plus de progresser dans le sujet et les résultats baissent immanquablement. Peu de résultats finalement autour de la moyenne.

| | Soin | P1 | P2 | P3 | Total | Note finale |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Moyenne | -1,3 | 3,8 | 4,4 | 7 | 7,8 | 8,3 |
| Sur | | 19 | 13 | 29 | 61 | 20 |

| Répartition | $< 6$ | $[6;8[$ | $[8;10[$ | $[10;12[$ | $\geqslant 12$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 13 | 7 | 1 | 7 | 8 |

## Problème I - Equations complexes

Problème bien trop peu traité à mon goût. Beaucoup ont préféré faire les équations différentielles, je le conçois mais il y avait des points à prendre dans ce problème et surtout faites attention à ne pas faire l'impasse sur les complexes, on les manipule régulièrement dans les autres chapitres.

Soient $A$, $B$, $C$, $I$, $O$ les points d'affixe respectivement $z_A = 1-i$, $z_B = \sqrt{2}i$, $z_C = 1+\left(\sqrt{2}-1\right)i$, $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$ et $Z_O = 0$. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \left\{\sqrt{2}i\right\}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\sqrt{2}i\right\}, \qquad f(z) = \frac{z-1+i}{z-\sqrt{2}i}.$$

1. Préciser la forme polaire de $z_A$ et de $z_B$.

   Question très basique, réussie dans l'ensemble mais je m'inquiète qu'elle est parue insurmontable pour plusieurs étudiants.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+i)\,z + 2 + 2i = 0$.

   Méthode comprise mais le calcul n'a pas été bon pour une partie non négligeable d'entre vous. J'ai croisé $\sqrt{\Delta}$ alors que $\Delta$ n'était pas réel !!!

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{10} - (1+i)\,z^5 + 2 + 2i = 0$.

   Très peu de bonnes réponses. Vous avez bien vu que $\omega = z^5$ était solution de la question précédente mais après vous bloquez complètement alors qu'il suffit juste d'appliquer la formule du cours sur les racines 5-ièmes d'un complexes. Il n'y a pratiquement aucun calcul, il suffit vraiment d'avoir juste compris et appris la proposition, ce qui n'est pas le cas pour la grande majorité d'entre vous...

4. Justifier que $A$ s'obtient à partir de $B$ par une rotation de centre $C$ dont on déterminera l'angle.

   Des bonnes réponses mais beaucoup ont fait la rotation de centre $O$ et non de centre $C$.

5. (a) Montrer que $f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) = \left\{ \left(\sqrt{2}+1+i\right) y \in \mathbb{C} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$.
Certains découvrent l'ensemble $\mathbb{U}$. Je rappelle que $f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) \Leftrightarrow |f(z)| = 1$ n'a pas de sens, il faut d'abord fixer $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\sqrt{2}i\right\}$ puis écrire $z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) \Leftrightarrow |f(z)| = 1$. Certains mènent bien les calculs mais ont du mal à conclure. La question n'est pas exotique nous l'avons traitée plusieurs fois.
(b) On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points dont l'affixe est dans $f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$. Vérifier que $O$, $I$ et $C$ sont des points de $\mathcal{D}$.
Des réponses bien rédigées et d'autres beaucoup moins.
(c) Montrer que pour $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\sqrt{2}i\right\}$, on a $z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B|$.
Peu de réponses pourtant la question n'est pas très difficile.
(d) En déduire à quel ensemble géométrique correspond $\mathcal{D}$ par rapport à $[AB]$.
Une poignées de bonnes réponses

6. Montrer que $ACBO$ est un losange.

   Celle-ci vous a plu d'avantage. Parfois vous en faites trop. Les quatre côtés égaux suffit. Ou alors les diagonales perpendiculaires et se coupant en leur milieu. Mais inutile de faire les deux caractérisations. Certains sont passés par le parallélogramme, cela marchait très bien aussi.

7. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $-\sqrt{2}i\,\mathrm{e}^{i\theta} + 1 - i = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{3\pi}{8}\right)}$.

   Une petite factorisation par l'angle moitié c'est tout ! Certains futés ont développé le membre de droite cela marchait aussi.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que

$$f^{\leftarrow}(\mathbb{U}_n) = \left\{ \sqrt{2}\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}} \;\middle|\; k \in [\![1; n-1]\!] \right\}.$$

   Très peu traitée. Question plus longue mais toujours pas exotique.

## Problème II - Calcul d'intégrales

Le théorème fondamental a posé de grosses difficultés comme à l'accoutumée et malgré mes avertissements. Très peu ont fait proprement les changements de variable (avec l'hypothèse !) pourtant nous en avions fait beaucoup.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in ]-1; 1[$, on définit

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1-t^2)^{n/2}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier avec soin que la fonction $F_n$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1; 1[$ et préciser sa dérivée.

   Vos réponses sont souvent très très confuses. Vous citez en vrac et de façon décousue des arguments sans que le correcteur comprenne leur utilité et leur lien. L'invocation du théorème fondamental doit être fait de façon automatique :

   - Hypothèse : la fonction intégrée est continue sur $]-1; 1[$ et l'intégrale va d'un réel fixé à la variable $x$.
   - On cite le théorème.
   - On conclut que $F_n$ est une primitive de la fonction intégrée.

   Ensuite, on peut ajouter que $F_n$ est donc dérivable et sa dérivée est la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t^2)^{n/2}}$ qui est elle même continue sur $\mathbb{R}$ donc $F_n$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Trop m'ont donné des dérivées fausses en dérivant $t \mapsto \frac{1}{(1-t^2)^{n/2}}\cdots$

2. Calculer $F_0$.

   Cadeau, bien réussi. Attention à la présentation de la variable $x$ et à ne pas confondre $F_0(x)$ avec $F_0$ ! On ne rajoute pas $+C$ gratuitement à la fin d'un calcul d'intégrale !

3. Calculer $F_1$.

   Cadeau aussi, enfin certains y ont vu de l'arctangeante.

4. Calculer les primitives de $F_1$.

   M'enfin !!! Les primitives de $F_1$ ce n'est pas $F_1$ ! Il fallait calculer les primitives de l'arcsin par une intégration par parties. Plusieurs bonnes réponses cependant.

5. Calculer $F_2$.

   Une petite décomposition en éléments simples. Plusieurs l'ont vue mais pas tout le monde. Question très classique.

6. Justifier que l'intégrale
$$I = \int_0^{\ln(3/2)} \frac{1}{2-\mathrm{e}^u}\,\mathrm{d}u.$$
   existe puis, à l'aide du changement de variable $t = \mathrm{e}^u - 1$ et de la question précédente, la calculer.

   La rédaction de l'existence n'est pas toujours très propre. L'hypothèse du changement est très souvent absente ! Beaucoup d'erreurs sur les bornes ou le d$u$. Il faut absolument savoir faire un changement de variable proprement.

7. Justifier que pour tout $x \in \left]-1;1\right[$, $\tan(\arcsin(x))$ existe puis montrer que
$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad \tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   J'ai été étonné de voir que très peu justifient le signe de $\cos(\arcsin(x))$ alors que je vous avais déjà corrigés dans un DS précédent dans lequel vous aviez déjà fait l'erreur. Si vous ne retravaillez pas vos DS, vos n'apprendrez pas de vos erreurs et vous n'avez aucun espoir de progresser.

8. A l'aide du changement de variable $t = \sin(u)$, calculer $F_3$.

   Mêmes remarques pour le changement de variable. Il fallait utiliser la question précédente.

# Problème III - Equations différentielles

Problème davantage traité mais le cours manque encore souvent de solidité. Vous connaissez les méthodes mais vous avez parfois du mal à aller jusqu'au bout de la question en autonomie.

On s'intéresse à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E)\ :\qquad \forall x\in\,]-1;1[\,,\qquad \left(1-x^2\right)y''(x)-xy'(x)+y(x)=x.$$

*Sauf mention contraire, on donnera pour solutions les fonctions à valeurs **réelles**.*

## Partie 1 : Une équation d'ordre 2

On considère l'équation différentielle

$$(F)\ :\qquad \forall x\in\mathbb{R},\qquad y''(x)+y(x)=x^3+7x+1+5\sin(x).$$

1. Justifier proprement que l'équation

$$(\mathscr{P})\ :\ \begin{cases} y \text{ solution de } (F)\\ y(0)=1/2,\ y'(0)=-3/2\end{cases}$$

est un problème de Cauchy. Que peut-on en déduire ?

Très peu de bonnes réponses. Il ne suffit pas de dire que $y$ est deux fois dérivable ou solution de $(F)$. Il faut citer toutes les hypothèses :

- Des coefficients constants.
- Un second membre continue.
- un $y$ et un $y'$ fixés au même instant.

Deux ou trois ont parfaitement récité le théorème. Deux ou trois autres bonnes réponses. La conclusion est souvent aussi maladroite. Vous insistez sur l'unicité mais l'existence n'est pas toujours claire ou l'inverse !

2. Préciser $(F_0)$ l'équation homogène associée à $(F)$ et résoudre $(F_0)$ dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.

*Dans chaque cas, on écrira l'ensemble solution sous forme ensembliste et sous forme de Vect.*

Beaucoup trop d'erreurs, la recherche des racines de $r^2+1$ semble difficile pour beaucoup. Je vous l'ai dit, les complexes sont importants. Trop également se trompent ou s'embrouillent entre les solutions réelles et complexes, preuve d'un apprentissage du cours trop superficiel car il s'agit ici simplement de réciter.

3. Résoudre

$$(F_1)\ :\qquad \forall x\in\mathbb{R},\qquad y''(x)+y(x)=x^3+7x+1.$$

Pas mal de bonnes réponses. Pas de Vect pour l'ensemble solution ! Le Vect est réservé aux ensembles des solutions HOMOGENES.

4. Déterminer l'ensemble des fonctions complexes solutions de

$$(F_2)\ :\qquad \forall x\in\mathbb{R},\qquad y''(x)+y(x)=\mathrm{e}^{ix}\,.$$

Beaucoup de bonnes réponses mais aussi plus de cafouillages ou d'erreurs de calcul. Le coefficient $a$ devant l'exponentielle n'est pas réel mais bien complexe.

5. En déduire l'ensemble des fonctions réelles solutions de

$$(F_3) \ : \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + y(x) = \sin(x).$$

Rédaction souvent lapidaire ! Plusieurs me parlent de la partie imaginaire d'un ensemble ? J'ai mis des points de cohérence mais peu de bonnes réponses car souvent vous vous êtes trompés à la question précédente.

6. En déduire l'ensemble des solutions de $(F)$.

Là aussi la rédaction est souvent très mauvaise ! Vous écrivez des fonctions sans les présenter, vous confondez les implications. Le principe de superposition ne donne pas a priori TOUTES les solutions mais vous permet d'en trouver UNE dans un premier temps. Ensuite on y ajoute les solutions homogènes. A bien revoir pour beaucoup d'entre vous même si j'ai eu la notation généreuse.

7. Résoudre $(\mathscr{P})$.

Facile mais il fallait avoir répondu aux questions précédentes. J'ai mis ici aussi des points de cohérence.

## Partie 2 : Une équation d'ordre 1

8. Justifier que $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2+2x+2}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les déterminer.

Il ne suffit pas de parachuter que $f$ est continue ou que le dénominateur est non nul. On calcule le discriminant, on en déduit que le dénominateur ne s'annule pas puis que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ et enfin que $f$ admet des primitives. De bons départs mais vous avez souvent du mal à aller jusqu'au bout du calcul, il faut persévérer.

On admet dans la suite le résultat suivant établi dans le problème 2 :
la fonction $G : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ est une primitive de $g : x \mapsto \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$ sur $]-1;1[$.

On fixe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle

$$(G_{\alpha,\beta}) \ : \qquad \forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad \left(1-x^2\right) y'(x) + xy(x) = \alpha \frac{\left(1-x^2\right)^{3/2} x^3}{x^2+2x+2} + \beta.$$

9. Justifier que $(G_{\alpha,\beta})$ admet des solutions sur $]-1;1[$.

Mal rédigé.

- On normalise d'abord l'équation en divisant par $1-x^2$ (car $1-x^2 \neq 0$ sur $]-1;1[$). Vous oubliez souvent de diviser TOUT le second membre.
- Puis on affirme que les fonctions $a : x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ et $b : x \mapsto \left[\alpha \frac{\left(1-x^2\right)^{3/2} x^3}{x^2+2x+2} + \beta\right] \frac{1}{1-x^2}$ sont continues sur $]-1;1[$.

10. Préciser $(G_0)$ l'équation différentielle homogène associée à $(G_{\alpha,\beta})$ et la résoudre.

*On écrira l'ensemble solution sous forme ensembliste et sous forme de Vect.*

Un bon nombre de bonnes réponses bien rédigées, c'est bien.

11. Déterminer $\mathscr{S}_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des solutions de $(G_{\alpha,\beta})$.

La méthode de variation de la constante est bien sue mais vous avez du mal à aller jusqu'au bout. Ou bien parce que vous vous êtes trompés avant ou bien parce que vous ne reconnaissez pas les fonctions dont on a déjà trouvé les primitives.

12. Vérifier que lorsque $\alpha = 0$, on a $\mathscr{S}_{0,\beta} = \left\{ \begin{array}{ccc} ]-1;1[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta x + C\sqrt{1-x^2} \end{array} \ \middle| \ C \in \mathbb{R} \right\}$.

Quelques résultats justes. Question très rapide sur $0,5$ point

### Partie 3 : Fini de rire

Soit $y$ une fonction deux fois dérivable sur $]-1;1[$. On pose alors

$$\forall x \in ]-1;1[, \qquad v(x) = \left(1-x^2\right) y'(x) + xy(x).$$

13. Préciser $(E_0)$ l'équation homogène associée à $(E)$.

    Cadeau.

14. Justifier que $v$ est une fonction dérivable et calculer sa dérivée.

    Mal rédigée. Il faut bien préciser que $y$ est deux fois dérivable donc $y'$ et $y$ sont dérivables et ensuite seulement on en déduit que $v$ est dérivable.

15. En déduire l'ensemble des solutions de $(E_0)$.

    Quelques bonnes réponses mais très peu.

Soit $y$ une fonction deux fois dérivable sur $]-1;1[$. On pose alors

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \qquad z(t) = y\left(\sin(t)\right).$$

16. Justifier que $z$ est une fonction deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

    Il faut bien justifier que $y$ est deux fois dérivable et que $\sin\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) = ]-1;1[$.

17. Montrer que $y$ est solution de $(E)$ si et seulement si $z$ est solution d'une équation différentielle que l'on reconnaîtra.

    Une seule bonne réponse je crois. Exactement du même style que l'interro 11 Q5.

18. En déduire l'ensemble des solutions de $(E)$.

    Une seule bonne réponse.

19. Comparer aux solutions de $(E_0)$ : quel lien bien connu dans le cas des équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants retrouve-t-on entre les solutions homogènes et celles de $(E)$ ?

    Non traitée.