Corrigé du Devoir Surveillé 4
Equations complexes, calcul d'intégrales et équations différentielles

Problème I - Equations complexes

Soient A, B, C, I, O les points d'affixe respectivement $z_A = 1-i$, $z_B = \sqrt{2}i$, $z_C = 1+\left(\sqrt{2}-1\right)i$, $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$ et $Z_O = 0$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \left\{\sqrt{2}i\right\}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\sqrt{2}i\right\}, \qquad f(z) = \frac{z-1+i}{z-\sqrt{2}i}.$$

1. On a les égalités entre les complexes suivantes :

$$z_A = 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Et,

$$z_B = \sqrt{2}i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{z_A = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ et } z_B = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}.}$$

2. Soit Δ le discriminant de $z^2 - (1+i)z + 2 + 2i$. On a

$$\Delta = (1+i)^2 - 4(2+2i) = 1 + 2i - 1 - 8 - 8i = -8 - 6i.$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\delta = x + iy$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\delta^2 = \Delta \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 + 2ixy = -8 - 6i \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = -6 \\ |\delta|^2 = |\Delta| \end{cases} \qquad \text{par unicité de la forme algébrique} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = -6 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 1 \\ 2xy = -6 \\ y^2 = 9 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{L_1+L_3}{2} \\ L_3 \leftarrow \frac{L_3-L_1}{2} \end{matrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \text{car } xy \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \delta = 1 - 3i \quad \text{OU} \quad \delta = -1 + 3i.
\end{aligned}$$

Fixons $\delta = 1 - 3i$, alors les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{1+i+1-3i}{2} = 1 - i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{1+i-1+3i}{2} = 2i.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{1-i; 2i\}.}$$

3. Soit $(E) : z^{10}-(1+i)\,z^5+2+2i$. Soit $z\in\mathbb{C}$. Posons $\omega=z^5$. On a

$$(E) \quad\Leftrightarrow\quad \omega^2-(1+i)\,\omega+2i=0.$$

Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
(E) \quad&\Leftrightarrow\quad \omega=1-i=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{OU} \quad \omega=2i=2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\\
&\Leftrightarrow\quad z^5=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{OU} \quad z^5=2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\\
&\Leftrightarrow\quad \exists k\in[\![0;4]\!],\quad z=\left(2^{1/2}\right)^{1/5}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{20}}\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}} \quad \text{OU} \quad z=2^{1/5}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{10}}\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}}\\
&\Leftrightarrow\quad \exists k\in[\![0;4]\!],\quad z=2^{1/10}\,\mathrm{e}^{i\frac{(8k-1)\pi}{20}} \quad \text{OU} \quad z=2^{1/5}\,\mathrm{e}^{i\frac{(4k+1)\pi}{10}}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{2^{1/10}\,\mathrm{e}^{i\frac{(8k-1)\pi}{20}};2^{1/5}\,\mathrm{e}^{i\frac{(4k+1)\pi}{10}}\ \middle|\ k\in[\![0;4]\!]\right\}.}$$

4. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z_A=\mathrm{e}^{i\,\theta}\,(z_B-z_C)+z_C \quad&\Leftrightarrow\quad 1-i=\mathrm{e}^{i\,\theta}\left(\sqrt{2}i-1-\left(\sqrt{2}-1\right)i\right)+1+\left(\sqrt{2}-1\right)i\\
&\Leftrightarrow\quad 1-i-1-i\sqrt{2}+i=\mathrm{e}^{i\,\theta}\,(-1+i)\\
&\Leftrightarrow\quad -i\sqrt{2}=\mathrm{e}^{i\,\theta}\,\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow\quad -i=\mathrm{e}^{i\,\theta}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\\
&\Leftrightarrow\quad \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}^{i\,\theta}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\\
&\Leftrightarrow\quad -\frac{\pi}{2}\equiv\theta+\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]\\
&\Leftrightarrow\quad \theta\equiv-\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]\\
&\Leftrightarrow\quad \theta\equiv-\frac{5\pi}{4}\equiv\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]\,.
\end{aligned}$$

Conclusion, on obtient bien un angle solution et donc :

$$\boxed{A \text{ est l'image de } B \text{ par la rotation de centre } C \text{ et d'angle } \frac{3\pi}{4}.}$$

5. (a) Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\left\{\sqrt{2}i\right\}$. On a les équivalences entre complexes suivantes :

$$\begin{aligned}
z\in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) \quad&\Leftrightarrow\quad f(z)\in\mathbb{U}\\
&\Leftrightarrow\quad f(z)\overline{f(z)}=1\\
&\Leftrightarrow\quad \frac{z-1+i}{z-\sqrt{2}i}\,\frac{\overline{z}-1-i}{\overline{z}+\sqrt{2}i}=1\\
&\Leftrightarrow\quad |z|^2-z-iz-\overline{z}+i\overline{z}+1+i-i+1=|z|^2+\sqrt{2}iz-\sqrt{2}i\overline{z}+2\\
&\qquad\qquad \text{car } z\neq\sqrt{2}i\\
&\Leftrightarrow\quad -(z+\overline{z})-i\,(z-\overline{z})=\sqrt{2}i\,(z-\overline{z})\\
&\Leftrightarrow\quad -2\mathrm{Re}\,(z)+2\mathrm{Im}(z)=-2\sqrt{2}\mathrm{Im}(z)\\
&\Leftrightarrow\quad \left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z).
\end{aligned}$$

Posons $x=\mathrm{Re}(z)$ et $y=\mathrm{Im}(z)$. Dès lors,

$$z\in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) \quad\Leftrightarrow\quad x=\left(\sqrt{2}+1\right)y \quad\Leftrightarrow\quad z=\left(\sqrt{2}+1\right)y+iy=\left(\sqrt{2}+1+i\right)y.$$

On note que si $z = \sqrt{2}i$, on a $x = 0$ et $y = \sqrt{2}$ et $0 \neq \left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{2}$. Donc $\sqrt{2}i$ ne fait pas partie de l'ensemble solution. Conclusion,

$$\boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) = \left\{ \left(\sqrt{2}+1+i\right) y \in \mathbb{C} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}.}$$

(b) On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points dont l'affixe est dans $f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$. Si $y = 0$, on a

$$0 = \left(\sqrt{2}+1+i\right) y \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) \qquad \Rightarrow \qquad O \in \mathcal{D}.$$

De plus,

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1 - i + \sqrt{2}i}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

Si on prend $y = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, on a

$$\left(\sqrt{2}+1+i\right) y = \left(\sqrt{2}+1+i\right)\frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{2-1+i\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} = \frac{1+i\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} = z_I.$$

Donc par la question précédente, $z_I \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$ et donc $I \in \mathcal{D}$.
Enfin, si $y = \sqrt{2}-1$, on a

$$\left(\sqrt{2}+1+i\right) y = \left(\sqrt{2}+1+i\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = 2-1+i\left(\sqrt{2}-1\right) = 1+i\left(\sqrt{2}-1\right) = z_C.$$

Donc $z_C \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$ et donc $C \in \mathcal{D}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Les points } O, I \text{ et } C \text{ appartiennent à } \mathcal{D}.}$$

(c) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\sqrt{2}i\right\}$. On observe que

$$\begin{aligned}
z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) \quad &\Leftrightarrow \quad f(z) \in \mathbb{U} \\
&\Leftrightarrow \quad |f(z)| = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{|z-1+i|}{\left|z-\sqrt{2}i\right|} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad |z-1+i| = \left|z-\sqrt{2}i\right| \qquad \text{car } z \neq \sqrt{2}i \text{ car } M \neq C \\
&\Leftrightarrow \quad |z-z_A| = |z-z_B|.
\end{aligned}$$

Conclusion, on a bien

$$\boxed{z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) \qquad \Leftrightarrow \qquad |z-z_A| = |z-z_B|.}$$

(d) Par la question précédente, pour $M(z)$ un point du plan complexe différent de B, on a

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) \\
&\Leftrightarrow \quad |z-z_A| = |z-z_B| \\
&\Leftrightarrow \quad AM = BM \\
&\Leftrightarrow \quad M \text{ est sur la médiatrice de } [AB].
\end{aligned}$$

Répétons que $z_B \notin f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$ et donc $B \notin \mathcal{D}$. Donc

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{D} \text{ est la médiatrice de } [AB].}$$

6. *Méthode 1, par les diagonales.* On a vu que $O \in \mathcal{D}$, $C \in \mathcal{D}$. Or $C \neq O$, donc $\mathcal{D} = (OC)$. Donc par la question précédente, (OC) est la médiatrice de $[AB]$. Donc les diagonales $[AB]$ et $[OC]$ sont perpendiculaires. De plus, $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$ donc z_I est le milieu de $[AB]$. Calculons $I'(z_{I'})$ le milieu de $[OC]$:
$$z_{I'} = \frac{z_C + z_O}{2} = \frac{1 + \left(\sqrt{2}-1\right)i}{2} = z_I \qquad \text{comme vu à la question 5.b}$$
Donc $I' = I$ et donc les diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires. Conclusion,
$$\boxed{ACBO \text{ est un losange.}}$$
Méthode 2, par les côtés. On a vu que $O \in \mathcal{D}$, $C \in \mathcal{D}$ et que $\mathcal{D}$ est la médiatrice de $[AB]$ donc $OA = OB$ et $AC = CB$. Montrons que $OA = AC$. On a
$$OA = |z_A - z_0| = |1 - i| = \sqrt{2}$$
et
$$AC = |z_C - z_A| = \left|1 + \left(\sqrt{2}-1\right)i - 1 + i\right| = \left|\sqrt{2}i\right| = \sqrt{2}.$$
Donc on a bien $OA = AC$ et donc $OB = OA = AC = CB$ et $ACBO$ a ses quatre côtés égaux. Conclusion,
$$\boxed{ACBO \text{ est un losange.}}$$

7. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a les égalités entre complexes suivantes :
$$\begin{aligned} -\sqrt{2}i\,\mathrm{e}^{i\theta} + 1 - i &= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{e}^{i\theta} + \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} \\ &= \sqrt{2}\left(\mathrm{e}^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} + \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \\ &= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}{2}}\right) && \text{par factorisation par l'angle moitié} \\ &= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)}\left(\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right)} + \mathrm{e}^{-i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}\right) \\ &= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)}\,2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right). \end{aligned}$$
Conclusion, on a bien
$$\boxed{\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \qquad -\sqrt{2}i\,\mathrm{e}^{i\theta} + 1 - i = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)}.}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\sqrt{2}i\right\}$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}_n) \quad &\Leftrightarrow \quad f(z) \in \mathbb{U}_n \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad f(z) = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad \frac{z-1+i}{z-\sqrt{2}i} = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad z - 1 + i = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\left(z - \sqrt{2}i\right) \qquad \text{car } z - \sqrt{2}i \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad z\left(1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = -\sqrt{2}i\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1 - i. \end{aligned}$$
A l'aide de la question précédente, avec $\theta = \frac{2k\pi}{n}$, on obtient que
$$z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}_n) \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad z\left(1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{8}\right)\mathrm{e}^{i\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{3\pi}{8}\right)}.$$

De plus, si $k = 0$, on obtient

$$z\left(1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = 0 = 2\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{8}} \qquad \text{ce qui est faux.}$$

Donc $k = 0$ et $1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \neq 0$. Par suite, $z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}_n)$ si et seulement s'il existe $k \in [\![1;n-1]\!]$ tel que

$$\begin{aligned}
z &= \frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{8}\right)\mathrm{e}^{i\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{3\pi}{8}\right)}}{1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}}\\
&= \frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{8}\right)\mathrm{e}^{i\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{3\pi}{8}\right)}}{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{n}}-\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right)} \qquad \text{par factorisation par l'angle moitié}\\
&= \frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{8}\right)\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{8}}}{\mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{n}}-\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}}\\
&= \frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{8}\right)\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{8}}}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\\
&= \sqrt{2}i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{8}}\\
&= \sqrt{2}\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$f^{\leftarrow}(\mathbb{U}_n) = \left\{\sqrt{2}\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}} \;\middle|\; k \in [\![1;n-1]\!]\right\}.$$

Problème II - Calcul d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1;1[$, on définit

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1-t^2)^{n/2}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $f_n : t \mapsto \frac{1}{(1-t^2)^{n/2}}$. Pour tout $t \in]-1;1[$, on a $1-t^2 > 0$. Donc f_n est définie et même continue sur $]-1;1[$ et $0 \in]-1;1[$. Donc par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction F_n est bien définie et est une primitive de f_n sur $]-1;1[$. En particulier, F_n est dérivable sur $]-1;1[$, $F_n' = f_n$ et donc F_n' est continue i.e. F_n est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;1[$. Conclusion,

$$\boxed{F_n \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]-1;1[\text{ et } \forall x \in]-1;1[\,,\ F_n'(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{n/2}}.}$$

2. Si $n = 0$, on a

$$\forall x \in]-1;1[\,, \qquad F_0(x) = \int_0^x \frac{1}{(1-t^2)^0}\,\mathrm{d}t = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x.$$

Conclusion,

$$\boxed{F_0 : \begin{array}{ccc}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x. \end{array}}$$

3. Si $n = 1$, on a

$$F_1(x) = \int_0^x \frac{1}{(1-t^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = [\arcsin(x)]_{t=0}^{t=x} = \arcsin(x) - \arcsin(0) = \arcsin(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{F_1 : \begin{array}{rcl}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arcsin(x). \end{array}}$$

Attention, F_1 *n'est pas exactement la fonction* arcsin *car* F_1 *n'est définie que sur* $]-1;1[$ *alors que bien entendu,* arcsin *est définie sur* $[-1;1]$.

4. La fonction arcsin est continue sur $]-1;1[$ donc F_1 est continue sur $]-1;1[$ et donc F_1 admet des primitives dont l'une est donnée par le théorème fondamental de l'analyse par

$$G_1 : x \mapsto \int_0^x F_1(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in]-1;1[$. On a

$$G_1(x) = \int_0^x \arcsin(t)\,\mathrm{d}t.$$

Posons pour tout $t \in]-1;1[$,

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = \arcsin(t). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;1[$ et donc sur $[0;x]$ (ou $[x;0]$) et

$$\forall t \in]-1;1[\,, \qquad \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}.$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} G_1(x) &= [t\arcsin(t)]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= x\arcsin(x) + \int_0^x \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= x\arcsin(x) + \left[\sqrt{1-t^2}\right]_{t=0}^{t=x} \\ &= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} - 1. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de F_1 est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{rcl}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}}.$$

5. Soit $x \in]-1;1[$. On a

$$F_2(x) = \int_0^x \frac{1}{(1-t^2)^{2/2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{(1-t)(1+t)}\,\mathrm{d}t.$$

Par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}, \qquad \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}.$$

Puis,

$$a = \lim_{\substack{t \to 1 \\ t \neq 1}} (1-t) \times \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \lim_{\substack{t \to 1 \\ t \neq 1}} \frac{1}{1+t} = \frac{1}{2}.$$

Et

$$b = \lim_{\substack{t \to -1 \\ t \neq -1}} (1+t) \times \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \lim_{\substack{t \to -1 \\ t \neq -1}} \frac{1}{1-t} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\forall t \in \left]-1;1\right[, \qquad \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{1/2}{1-t} + \frac{1/2}{1+t}.$$

Donc

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \left[-\frac{1}{2}\ln(|1-t|) + \frac{1}{2}\ln(|1+t|)\right]_{t=0}^{t=x} \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x) - 0. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{F_2 : \begin{array}{ccl} \left]-1;1\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x). \end{array}}$$

6. Pour tout $u \in [0;\ln(3/2)]$, $\mathrm{e}^u \in [1;3/2]$ et donc $2-\mathrm{e}^u > 2-\frac{3}{2} = \frac{1}{2} > 0$. Donc $u \mapsto \frac{1}{2-\mathrm{e}^u}$ est continue sur $[0;\ln(3/2)]$ et donc

$$\boxed{I \text{ existe.}}$$

Posons $t = \mathrm{e}^u - 1$ i.e. $u = \ln(t+1)$. La fonction $t \mapsto \ln(t+1)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-1;+\infty\right[$ donc sur $\left[0;\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]$ et $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$. Donc par le théorème de changement de variable,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\ln(3/2)} \frac{1}{2-\mathrm{e}^u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1}{2-(t+1)}\frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1}{1-t}\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= F_2\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Donc par la question précédente,

$$I = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(3).$$

Conclusion,

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\ln(3).}$$

7. Soit $x \in \left]-1;1\right[$. On sait que $\arcsin(x)$ existe et par sa stricte croissance sur $[-1;1]$, on a

$$\arcsin(-1) < \arcsin(x) < \arcsin(1) \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{\pi}{2} < \arcsin(x) < \frac{\pi}{2}.$$

Donc $\arcsin(x) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\subseteq \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$. Donc $\tan(\arcsin(x))$ existe.

De plus, par définition de la tangente,

$$\tan(\arcsin(x)) = \frac{\sin(\arcsin(x))}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{x}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Or on sait que $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$. De plus, $\arcsin(x) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Donc $\cos(\arcsin(x)) > 0$. Ainsi,

$$\cos(\arcsin(x)) = +\sqrt{1-x^2}.$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x \in \left]-1;1\right[,\ \tan(\arcsin(x)) \text{ existe et } \tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

8. Soit $x \in]-1;1[$. On a

$$F_3(x) = \int_0^x \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t.$$

Posons $t = \sin(u)$ i.e. $u = \arcsin(t)$, car $t \in [0;x] \subseteq]-1;1[$. La fonction sin est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;\arcsin(x)]$ (ou $[\arcsin(x);0]$) et $\mathrm{d}t = \cos(u)\,\mathrm{d}u$. Donc par le théorème de changement de variable,

$$\begin{aligned}
F_3(x) &= \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(x)} \frac{1}{\left(1-\sin^2(u)\right)^{3/2}}\cos(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\arcsin(x)} \frac{1}{(\cos^2(u))^{3/2}}\cos(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\arcsin(x)} \frac{1}{(|\cos(u)|)^3}\cos(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\arcsin(x)} \frac{1}{(|\cos(u)|)^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\arcsin(x)} \frac{1}{\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u \\
&= [\tan(u)]_{u=0}^{u=\arcsin(x)} \\
&= \tan(\arcsin(x)) - 0.
\end{aligned}$$

Conclusion, par la question précédente,

$$\boxed{F_3 : \begin{array}{rcl}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \end{array}}$$

Problème III - Equations différentielles

On s'intéresse à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E)\ :\qquad \forall x \in\,]-1;1[\,,\qquad \left(1-x^2\right) y''(x) - xy'(x) + y(x) = x.$$

*Sauf mention contraire, on donnera pour solutions les fonctions à valeurs **réelles**.*

Partie 1 : Une équation d'ordre 2

On considère l'équation différentielle

$$(F)\ :\qquad \forall x \in \mathbb{R},\qquad y''(x) + y(x) = x^3 + 7x + 1 + 5\sin(x).$$

1. L'équation (F) est une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants et dont le second membre $d : x \mapsto x^3 + 7x + 1 + 5\sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc (F) admet des solutions. De plus, ici on fixe « les conditions initiales » $y(0)$ et $y'(0)$. Conclusion,

$$\boxed{(\mathscr{P}) \text{ est un problème de Cauchy et admet donc une unique solution.}}$$

2. L'équation homogène associée à (F) est donnée directement par

$$\boxed{(F_0)\ :\qquad \forall x \in \mathbb{R},\qquad y''(x) + y(x) = 0.}$$

L'équation caractéristique associée est alors $(F_c) : r^2 + 1 = 0$ dont les solutions sont i et $-i$. Donc l'ensemble des solutions de (F_0) est donné dans $\mathbb{C}$ par

$$\boxed{\mathscr{S}_{F_0}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & A\,\mathrm{e}^{ix} + B\,\mathrm{e}^{-ix} \end{array} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{C}^2 \right\}}$$

i.e.

$$\boxed{\mathscr{S}_{F_0}(\mathbb{C}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{xi} \end{array}, \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-ix} \end{array} \right).}$$

Puis, dans $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathscr{S}_{F_0}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\cos(x) + B\sin(x) \end{array} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\cos, \sin\right)}$$

3. Cherchons une solution sous la forme d'un polynôme de degré 3. Soient $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ et $y_1 : x \mapsto a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. La fonction y_1 est définie et même deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et l'on a

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}, && y_1(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &\forall x \in \mathbb{R}, && y_1'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 \\ &\forall x \in \mathbb{R}, && y_1''(x) = 6a_3x + 2a_2. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} y_1 \text{ solution de } (F_1) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (6a_3x + 2a_2) + \left(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\right) = x^3 + 7x + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a_3x^3 + a_2x^2 + (a_1 + 6a_3)\,x + a_0 + 2a_2 = x^3 + 7x + 1. \end{aligned}$$

On note alors qu'il suffit de prendre

$$\begin{cases} a_3 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_1 + 6a_3 = 7 \\ a_0 + 2a_2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_3 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_1 = 7 - 6a_3 = 7 - 6 = 1 \\ a_0 = 1 - 2a_2 = 1 \end{cases}.$$

Par conséquent,

$$y_1 : x \mapsto x^3 + x + 1 \text{ est UNE solution de } (F_1).$$

Donc par la question précédente, on conclut que

$$\boxed{\mathscr{S}_{F_1} = y_1 + \mathscr{S}_{F_0}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + x + 1 + A\cos(x) + B\sin(x) \end{array} \middle| (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

4. L'équation homogène associée à (F_2) est toujours (F_0) et i est une racine simple de l'équation caractéristique associée. On cherche alors une solution sous la forme suivante. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $y_2 : x \mapsto ax\,\mathrm{e}^{ix}$. La fonction y_2 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R}, & y_2(x) = ax\,\mathrm{e}^{ix} \\ \forall x \in \mathbb{R}, & y_2'(x) = (a + iax)\,\mathrm{e}^{ix} = (iax + a)\,\mathrm{e}^{ix} \\ \forall x \in \mathbb{R}, & y_1''(x) = (ia - ax + ia)\,\mathrm{e}^{ix} = (-ax + 2ia)\,\mathrm{e}^{ix}. \end{array}$$

Dès lors,

$$\begin{array}{llll} y_2 \text{ solution de } (F_2) & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, & (-ax + 2ia)\,\mathrm{e}^{ix} + ax\,\mathrm{e}^{ix} = \mathrm{e}^{ix} \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, & -ax + 2ia + ax = 1 \qquad \text{car } \mathrm{e}^{ix} \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, & 2ia = 1 \\ & \Leftrightarrow & a = \dfrac{1}{2i} = -\dfrac{i}{2} & \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, & y_2(x) = -\dfrac{i}{2}\,\mathrm{e}^{ix}. \end{array}$$

Par conséquent,

$$y_2 : x \mapsto -\frac{ix}{2}\,\mathrm{e}^{ix} \text{ est UNE solution de } (F_2).$$

Conclusion, par la question 2., on a

$$\boxed{\mathscr{S}_{F_2} = y_2 + \mathscr{S}_{F_0}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \left(A - \frac{ix}{2}\right)\mathrm{e}^{ix} + B\,\mathrm{e}^{-ix} \end{array} \middle| (A, B) \in \mathbb{C}^2 \right\}.}$$

5. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{ix}\right)$ et que y_2 est une solution de (F_2), on en déduit que $y_3 = \mathrm{Im}\,(y_2)$ est une solution de (F_3). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$y_3(x) = \mathrm{Im}\left(-\frac{ix}{2}\,\mathrm{e}^{ix}\right) = \mathrm{Im}\left(-\frac{ix}{2}\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)\right) = -\cos(x)\frac{x}{2}.$$

Donc $y_3 : x \mapsto -\frac{x\cos(x)}{2}$ est une solution de (F_3). Or l'équation homogène associée à (F_3) est toujours (F_0). Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_{F_3} = y_3 + \mathscr{S}_{F_0}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(A - \frac{x}{2}\right)\cos(x) + B\sin(x) \end{array} \middle| (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

6. Puisque y_1 est une solution de (F_1) et y_3 une solution de (F_3), par le principe de superposition, on en déduit que $y_p = y_1 + 5y_3$ est une solution de (F) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y_p(x) = x^3 + x + 1 - \frac{5}{2}x\cos(x).$$

Donc toujours à l'aide de la question 2. on conclut que l'ensemble des solutions de (F) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_F = y_p + \mathscr{S}_{F_0}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + x + 1 + \left(A - \frac{x}{2}\right)\cos(x) + B\sin(x) \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

7. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Par la question précédente, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (\mathscr{P}) \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = x^3 + x + 1 + \left(A - \frac{x}{2}\right)\cos(x) + B\sin(x) \\ y(0) = 1/2\ y'(0) = -3/2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} y(x) = x^3 + x + 1 + \left(A - \frac{x}{2}\right)\cos(x) + B\sin(x) \\ y'(x) = 3x^2 + 1 - \frac{1}{2}\cos(x) - \left(A - \frac{x}{2}\right)\sin(x) + B\cos(x) \\ y(0) = 1 + A = \frac{1}{2} \\ y'(0) = 1 - \frac{1}{2} + B = -\frac{3}{2} \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} y(x) = x^3 + x + 1 + \left(A - \frac{x}{2}\right)\cos(x) + B\sin(x) \\ A = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \\ B = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = x^3 + x + 1 - \frac{x+1}{2}\cos(x) - 2\sin(x).
\end{aligned}$$

Conclusion, l'unique solution solution de $(\mathscr{P})$ est donnée par

$$\boxed{y_{\mathscr{P}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + x + 1 - \frac{x+1}{2}\cos(x) - 2\sin(x) \end{array}.}$$

Partie 2 : Une équation d'ordre 1

8. Soit Δ le discriminant de $X^2 + 2X + 2$. On a $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$. Donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Par conséquent,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet des primitives sur } \mathbb{R}.}$$

On effectue la division euclidienne de x^3 par $x^2 + 2x + 2$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & & & & X^2 + 2X + 2 \\ \cline{5-5}
-(X^3 & +2X^2 & +2X) & & X - 2 \\ \cline{1-3}
 & -2X^2 & -2X & & \\
 & -(-2X^2 & -4X & -4) & \\ \cline{2-4}
 & & 2X & +4 &
\end{array}$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\left(x^2 + 2x + 2\right)(x - 2) + 2x + 4}{x^2 + 2x + 2} = x - 2 + \frac{2x + 4}{x^2 + 2x + 2}.$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = x^2 + 2x + 2$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x + 2$. On observe alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x + 4 = u'(x) + 2$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x - 2 + \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{2}{x^2+2x+2} = x - 2 + \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{2}{(x+1)^2+1}.$$

Ainsi, la fonction suivante est une primitive de f :

$$F : x \mapsto \frac{x^2}{2} - 2x + \ln\left(|u(x)|\right) + 2\arctan\left(x+1\right).$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2}{2} - 2x + \ln\left(x^2+2x+2\right) + 2\arctan\left(x+1\right) + C \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

On admet dans la suite le résultat suivant établi dans le problème 2 :
la fonction $G : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ est une primitive de $g : x \mapsto \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$ sur $]-1;1[$.

On fixe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle

$$(G_{\alpha,\beta}) : \qquad \forall x \in]-1;1[, \qquad \left(1-x^2\right) y'(x) + xy(x) = \alpha \frac{\left(1-x^2\right)^{3/2} x^3}{x^2+2x+2} + \beta.$$

9. Pour tout $x \in]-1;1[$, on a $1 - x^2 \neq 0$. Donc

$$(G_{\alpha,\beta}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in]-1;1[, \qquad y'(x) + \frac{x}{1-x^2} y(x) = \alpha \frac{\sqrt{1-x^2}x^3}{x^2+2x+2} + \frac{\beta}{1-x^2}.$$

La fonction $a : x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ est continue sur $]-1;1[$. Soit $b : x \mapsto \alpha\frac{\sqrt{1-x^2}x^3}{x^2+2x+2} + \frac{\beta}{1-x^2}$. On a déjà vu dans la question précédente que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 2 \neq 0$. Donc la fonction b est aussi continue sur $]-1;1[$. Conclusion,

$$\boxed{\text{l'équation } (G_{\alpha,\beta}) \text{ admet des solutions sur }]-1;1[.}$$

10. Par définition, on a

$$(G_0) \qquad \forall x \in]-1;1[, \qquad y'(x) + \frac{x}{1-x^2} y(x) = 0.$$

La fonction $a : x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ est continue sur $]-1;1[$ donc admet des primitives sur $]-1;1[$ dont l'une est donnée sur $]-1;1[$ par

$$A : x \mapsto -\frac{1}{2}\ln\left(\left|1-x^2\right|\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right).$$

Donc pour tout $x \in]-1;1[$, on a

$$\mathrm{e}^{-A(x)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)} = \sqrt{1-x^2}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (G_0) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_{G_0} = \left\{ \begin{array}{ccc}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\sqrt{1-x^2} \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array} \right).}$$

11. Procédons à la méthode de variation de la constante. Posons

- $y_0 : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
- y une fonction dérivable sur $]-1;1[$
- $\lambda = \frac{y}{y_0}$.

La fonction λ est bien définie sur $]-1;1[$, car $\forall x \in]-1;1[$, $\sqrt{1-x^2} \neq 0$. Plus précisément, $\forall x \in]-1;1[$, $1-x^2>0$, donc y_0 ne s'annule pas et est dérivable sur $]-1;1[$. Donc comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas λ est dérivable sur $]-1;1[$ et on a $y = \lambda\, y_0$. Par suite,

$$\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (G_{\alpha,\beta}) \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in]-1;1[\,, \quad \lambda'(x)y_0(x) + \underbrace{\lambda(x)y_0'(x) + \frac{x}{1-x^2}\lambda(x)y_0(x)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_{G_0}} = \alpha\frac{\sqrt{1-x^2}x^3}{x^2+2x+2} + \frac{\beta}{1-x^2} \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in]-1;1[\,, \quad \lambda'(x)\sqrt{1-x^2} = \alpha\frac{\sqrt{1-x^2}x^3}{x^2+2x+2} + \frac{\beta}{1-x^2} \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in]-1;1[\,, \quad \lambda'(x) = \alpha\frac{x^3}{x^2+2x+2} + \frac{\beta}{(1-x^2)^{3/2}} = \alpha f(x) + \beta g(x).
\end{aligned}$$

On a admis (ou démontré en problème 2) que $G : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ est une primitive de G. De plus, par la question 8. $F : x \mapsto \frac{x^2}{2} - 2x + \ln\left(x^2+2x+2\right) + 2\arctan(x+1)$ est une primitive de f. Donc

$$\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (G_{\alpha,\beta}) \\
\Leftrightarrow\quad & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1;1[\,, \\
& \quad \lambda(x) = \alpha\left(\frac{x^2}{2} - 2x + \ln\left(x^2+2x+2\right) + 2\arctan(x+1)\right) + \beta\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C \\
\Leftrightarrow\quad & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1;1[\,, \\
& \quad y(x) = \lambda(x)y_0(x) \\
& \qquad = \alpha\sqrt{1-x^2}\left(\frac{x^2}{2} - 2x + \ln\left(x^2+2x+2\right) + 2\arctan(x+1)\right) + \beta x + C\sqrt{1-x^2}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_{\alpha,\beta} = \left\{ \begin{array}{rcl}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \alpha\sqrt{1-x^2}\left(\frac{x^2}{2} - 2x + \ln\left(x^2+2x+2\right) + 2\arctan(x+1)\right) + \beta x + C\sqrt{1-x^2} \end{array} \ \middle|\ C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

12. En particulier, si $\alpha = 0$, on obtient

$$\boxed{\mathscr{S}_{0,\beta} = \left\{ \begin{array}{rcl}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta x + C\sqrt{1-x^2} \end{array} \ \middle|\ C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Partie 3 : Fini de rire

Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]-1;1[$. On pose alors

$$\forall x \in]-1;1[\,, \qquad v(x) = \left(1-x^2\right)y'(x) + xy(x).$$

13. Pour tout $x \in]-1;1[$, on a $1-x^2 \neq 0$. Donc

$$(E)\ :\qquad \forall x \in]-1;1[\,, \qquad y''(x) - \frac{x}{1-x^2}y'(x) + \frac{1}{1-x^2}y(x) = \frac{x}{1-x^2}.$$

Conclusion, l'équation homogène associée à (E) est

$$\boxed{(E_0)\ :\qquad \forall x \in\,]-1;1[\,,\qquad y''(x) - \frac{x}{1-x^2}y'(x) + \frac{1}{1-x^2}y(x) = 0.}$$

14. Puisque y est deux fois dérivable sur $]-1;1[$, on en déduit que y' est dérivable sur $]-1;1[$. Les fonctions $x \mapsto 1-x^2$, $x \mapsto x$ et y sont aussi dérivables sur $]-1;1[$. Donc v est dérivable et

$$\forall x \in\,]-1;1[\,,\qquad v'(x) = -2xy'(x) + \left(1-x^2\right)y''(x) + y(x) + xy'(x) = \left(1-x^2\right)y''(x) - xy'(x) + y(x).$$

Conclusion, $\boxed{v \text{ est dérivable sur }]-1;1[}$ et

$$\boxed{\forall x \in\,]-1;1[\,,\qquad v'(x) = \left(1-x^2\right)y''(x) - xy'(x) + y(x).}$$

15. Par les questions précédentes,

$$\begin{array}{lll}
 & y \text{ est solution de } (E_0) & \\
\Leftrightarrow & \forall x \in\,]-1;1[\,,\quad y''(x) - \dfrac{x}{1-x^2}y'(x) + \dfrac{1}{1-x^2}y(x) = 0 & \\
\Leftrightarrow & \forall x \in\,]-1;1[\,,\quad \left(1-x^2\right)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0 & \text{car } 1-x^2 \neq 0 \\
\Leftrightarrow & \forall x \in\,]-1;1[\,,\quad v'(x) = 0 & \\
\Leftrightarrow & \exists \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in\,]-1;1[\,,\quad v(x) = \beta & \\
\Leftrightarrow & \exists \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in\,]-1;1[\,,\quad \left(1-x^2\right)y'(x) + xy(x) = \beta & \\
\Leftrightarrow & \exists \beta \in \mathbb{R},\ y \text{ est solution de } \left(G_{0,\beta}\right) \text{ sur }]-1;1[\,. &
\end{array}$$

Donc par la question 12.

$$y \text{ est solution de } (E_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists\,(C,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in\,]-1;1[\,,\qquad y(x) = \beta x + C\sqrt{1-x^2}.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E_0) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_{E_0} = \left\{ \begin{array}{rcl}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta x + C\sqrt{1-x^2} \end{array} \;\middle|\; (\beta, C) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]-1;1[$. On pose alors

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,\qquad z(t) = y\left(\sin(t)\right).$$

16. Pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin(t) \in\,]-1;1[$. Donc $z = y \circ \sin$ est bien définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. La fonction sin est deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et y est deux fois dérivable sur $]-1;1[$. Conclusion, par composée,

$$\boxed{z \text{ est deux fois dérivable sur } \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[.}$$

17. Pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et tout $x \in\,]-1;1[$, on a $x = \sin(t) \ \Leftrightarrow\ t = \arcsin(x)$. Donc

$$\begin{aligned}
\forall x \in\,]-1;1[\,,\qquad y(x) &= z\left(\arcsin(x)\right) \\
\forall x \in\,]-1;1[\,,\qquad y'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}z'\left(\arcsin(x)\right) \\
\forall x \in\,]-1;1[\,,\qquad y''(x) &= -\frac{-2x}{2\left(1-x^2\right)^{3/2}}z'\left(\arcsin(x)\right) + \frac{1}{1-x^2}z''\left(\arcsin(x)\right) \\
&= \frac{x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}z'\left(\arcsin(x)\right) + \frac{1}{1-x^2}z''\left(\arcsin(x)\right).
\end{aligned}$$

Par suite, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& y \text{ est solution de } (E) \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad \left(1-x^2\right) y''(x) - xy'(x) + y(x) = x \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in \left]-1;1\right[, \\
& \quad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} z'\left(\arcsin(x)\right) + z''\left(\arcsin(x)\right) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} z'\left(\arcsin(x)\right) + z\left(\arcsin(x)\right) = x \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad z''\left(\arcsin(x)\right) + z\left(\arcsin(x)\right) = x \\
\Leftrightarrow\quad & \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \qquad z''(t) + z(t) = \sin(t) \\
\Leftrightarrow\quad & z \text{ est solution de } (F_3) \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{y \text{ est solution de } (E) \qquad \Leftrightarrow \qquad z \text{ est solution de } (F_3) \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[.}$$

18. Avec les notations de la question précédente, et par la question 5.

$$\begin{aligned}
& y \text{ est solution de } (E) \\
\Leftrightarrow\quad & \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \qquad z(t) = \left(A - \frac{t}{2}\right)\cos(t) + B\sin(t) \\
\Leftrightarrow\quad & \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \left]-1;1\right[, \\
& \quad y(x) = z\left(\arcsin(x)\right) = \left(A - \frac{\arcsin(x)}{2}\right)\cos\left(\arcsin(x)\right) + B\sin\left(\arcsin(x)\right).
\end{aligned}$$

Or pour tout $x \in \left]-1;1\right[$, $\sin\left(\arcsin(x)\right) = x$ et on a vu à la question 7. que $\cos\left(\arcsin(x)\right) = \sqrt{1-x^2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
& y \text{ est solution de } (E) \\
\Leftrightarrow\quad & \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \qquad z(t) = \left(A - \frac{t}{2}\right)\cos(t) + B\sin(t) \\
\Leftrightarrow\quad & \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \left]-1;1\right[, y(x) = \left(A - \frac{\arcsin(x)}{2}\right)\sqrt{1-x^2} + Bx.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{array}{rcl} \left]-1;1\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(A - \frac{\arcsin(x)}{2}\right)\sqrt{1-x^2} + Bx \end{array} \middle| \ C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

19. Posons $y_p : x \mapsto -\frac{\arcsin(x)}{2}\sqrt{1-x^2}$. Par la question 18. et 15., en prenant $C = A$ et $\beta = B$, on observe que

$$\mathscr{S}_E = y_p + \left\{ \begin{array}{rcl} \left]-1;1\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\sqrt{1-x^2} + Bx \end{array} \middle| \ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\} = y_p + \mathscr{S}_{E_0} = \left\{ y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathscr{S}_{E_0} \right\}.$$

Conclusion, on retrouve la même structure que pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants (ou que les équations différentielles linéaires d'ordre 1) :

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathscr{S}_{E_0} \right\}.}$$