Epreuve de mathématiques 5
2022-2023

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Matrices

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie 1 : Par la division euclidienne

1. Calculer A^2.
2. Exprimer A^2 en fonction de A et de I_3.
3. En déduire que A est inversible et préciser A^{-1}.

On pose $P = X^2 - X - 2$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer R_n le reste de la division euclidienne de X^n par P.
5. En déduire une expression de A^n en fonction de I_3, A et n.

Partie 2 : Par diagonalisation

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
7. Calculer $D = P^{-1}AP$.
8. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de n *(on précisera chaque coefficient de la matrice).*

Partie 3 : Par la formule de Newton

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, J^k *(une démonstration est attendue).*
10. Exprimer A en fonction de I_3 et J.
11. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de I_3, J et n *(mais le résultat ne doit plus faire apparaître de somme).*

Partie 4 : Un ensemble de matrices

On considère l'ensemble des matrices dont le total de chaque ligne est constant :

$$F = \left\{ B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall i \in [\![1;3]\!],\ \sum_{j=1}^{3} b_{i,j} = \lambda \right\}.$$

12. Montrer proprement que $I_3 \in F$ et que $A \in F$.
13. On prend $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ deux matrices **quelconques** de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $C = AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$.
   (a) Rappeler la formule permettant de calculer $c_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1;3]\!]^2$.
   (b) En déduire que si $A \in F$ et $B \in F$ alors $AB \in F$.

Problème 2 - Analyse asymptotique

L'objectif du problème est d'établir de différentes façons le développement limité de la fonction $\varphi = \operatorname{argsh}$ la réciproque de la fonction sh sur $\mathbb{R}$.

Partie 1 : Echauffement

1. Préciser le développement limité à l'ordre 5 en 0 de e^x et de e^{-x}.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 5 de sh en 0.
3. **En utilisant le fait que** ch est une primitive de sh sur $\mathbb{R}$, déduire de la question précédente, le développement limité à l'ordre 5 en 0 de ch.

Partie 2 : Construction et propriétés de φ

4. Justifier que sh définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note dans toute la suite $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la réciproque de la fonction sh.

5. Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = \varphi(y)$. Montrer que $\operatorname{sh}(-x) = -y$ puis en déduire que $\varphi(-y) = -\varphi(y)$. Que peut-on en conclure ?
6. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(y) = \frac{1}{\operatorname{ch} \circ \varphi(y)}.$$

7. Montrer à l'aide de la question précédente et par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, φ est $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.
8. Justifier que φ admet un développement limité à l'ordre 5 en 0.
9. Justifier que son développement limité s'écrit sous la forme suivante :

$$(\bigstar) \qquad \varphi(y) \underset{y \to 0}{=} a_1 y + a_3 y^3 + a_5 y^5 + o\left(y^5\right),$$

où a_1, a_3 et a_5 sont trois coefficients que l'on déterminera dans les parties suivantes.

Partie 3 : Méthode 1

10. Pour tout $k \in [\![2;5]\!]$, calculer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\operatorname{sh}^k(x)$.
11. A l'aide de $(\bigstar)$, en déduire le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\varphi \circ \operatorname{sh}(x)$ en fonction de a_1, a_3 et a_5.
12. En utilisant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi \circ \operatorname{sh}(x) = x$, en déduire les coefficients a_1, a_3 et a_5 puis écrire le développement limité de φ à l'ordre 5 en 0.
13. Justifier que φ' admet un développement limité à l'ordre 4 en 0 et le déduire de la question précédente.

Partie 4 : Méthode 2

On donne pour la suite

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(y) = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$$

14. Retrouver le développement limité à l'ordre 5 en 0 de φ.

Partie 5 : Applications

15. Préciser avec le moins de calculs possibles la valeur de $f^{(5)}(0)$.
16. Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(x)}$. Déterminer si $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f possède une asymptote en $+\infty$ et si c'est le cas, déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$.
17. Déterminer la limite en 0 de $g : x \mapsto \frac{\arctan(\varphi(x)) - \arctan(\sin(x))}{x(\varphi(x)^2 + 2\cos(x) - 2)}$.

Problème 3 - Ensembles et applications

Soit E un ensemble, $A \in \mathscr{P}(E)$ un sous-ensemble de E et f l'application suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ F & \mapsto & f(F) = F \cup A. \end{array}$$

1. On suppose que $A = \emptyset$. Montrer alors que f est bijective et préciser f^{-1}.
2. On suppose que $A \neq \emptyset$. Alors, on note $x_A \in A$ un élément fixé de A.
   (a) A l'aide des ensembles $F_1 = \{x_A\}$ et $F_2 = \emptyset$, montrer que f n'est pas injective.
   (b) A l'aide de l'ensemble $F_3 = E \setminus \{x_A\}$, montrer que f n'est pas surjective non plus.