Commentaires du DS5
Matrices, ensembles et applications, analyse asymptotique

Un DS avec beaucoup de parties très proches du cours et d'exercices du TD. Certaines méthodes très classiques n'ont pas été assimilées (comme le binôme de Newton) et/ou oubliées (bijection, dérivabilité de la réciproque). Une bonne approche dans les calculs d'analyse asymptotique mais peu d'applications traitées.

	P1	P2	P3	Total	Note finale
Moyenne	9,8	0,89	21,29	9,11	
Sur	22	30	8	60	20

Répartition	< 6	$[6;8[$	$[8;10[$	$[10;12[$	$\geqslant 12$
Effectif	11	6	5	8	8

Problème I - Matrices

On pose $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

Partie 1 : Par la division euclidienne

1. Calculer A^2.

   Cadeau. Une réponse ne peut pas être une simple égalité sans phrase. Il faut au moins un « On a : » Le mieux étant de présenter son calcul histoire de justifier a minima son résultat.

2. Exprimer A^2 en fonction de A et de I_3.

   Même remarque.

3. En déduire que A est inversible et préciser A^{-1}.

   Bien. Attention toujours lorsque l'on factorise par A à ne pas écrire que $A^2-A=A\,(A-1)$ l'addition d'un réel et d'une matrice n'a aucun sens. Certain on fait un pivot de Gauss, c'est tout à fait possible mais bien plus long.

On pose $P=X^2-X-2$.

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, calculer R_n le reste de la division euclidienne de X^n par P.

   Attention à respecter les notations de l'énoncer, on parle de R_n et non de R. Quelques manques de rédactions sur les polynômes mais comme nous n'avions pas vu ce chapitre je n'ai pas sanctionner : justifiez pourquoi R_n est de degré 1 ou moins et surtout pourquoi vous obtenez $(-1)^n=-a+b$ par exemple ! Quelques erreurs de calculs pour a_n et b_n et des résultats non simplifiés. Plusieurs bonnes réponses.

5. En déduire une expression de A^n en fonction de I_3, A et n.

   Facile, il fallait simplement utiliser l'égalité précédente en $X=A$ EN JUSTIFIANT bien que $P(A)=O_3$ ce qui a parfois manqué.

Partie 2 : Par diagonalisation

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

   Tout le monde a vu le pivot, beaucoup ont la bonne réponse mais pas tous et pire : certains n'ont pas vérifié leur résultat ! Mais beaucoup y ont quand même pensé.

7. Calculer $D = P^{-1}AP$.

   Forcément, si l'on n'a pas la bonne matrice P^{-1} difficile de répondre à la question. Sinon ce simple calcul matriciel a quand même gêné quelques-uns.

8. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de n *(on précisera chaque coefficient de la matrice).*

   J'acceptais que l'on ne démontre pas la formule $A^n = PD^nP^{-1}$. Quelques-uns l'ont faites. J'ai malgré tout croisé l'horreur $A^n = P^nD^nP^{-n}$. Le calcul est un peu gros à écrire mais rien d'impossible pourvu là aussi que l'on ait bien obtenu une matrice D diagonale...

Partie 3 : Par la formule de Newton

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, J^k *(une démonstration est attendue).*

   Bien trop peu de réponses parfaitement correctes alors que nous l'avions fait en classe en interrogation !!! Conclusion : vous ne retravaillez pas suffisamment efficacement les exercices vus en classe. Beaucoup oublient de traiter J^0. La récurrence n'est pas toujours bien écrite. Notamment si vous faites l'initialisation à $n = 1$. L'hérédité commence par soit $n \in \mathbb{N}^*$ et non $n \in \mathbb{N}$.

10. Exprimer A en fonction de I_3 et J.

    Cadeau.

11. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de I_3, J et n *(mais le résultat ne doit plus faire apparaître de somme).*

    Un carnage. Les années précédentes, ce type de question est bien mieux traité. Pourtant nous l'avions fait à plusieurs reprises en classe, je vous avais dit de retravailler la question du DM qui était de même type et très très peu ont réussi la question. Certains ne citent toujours pas l'hypothèse de la formule, d'autres se trompent sur la formule, d'autres n'ont pas vu que J^0 doit être traité à part des J^k pour $k \geqslant 1$ et pratiquement personne n'arrive au bout de la question. La conclusion est la même : si vous bloquez sur des exercices très classiques vus plusieurs fois en classe c'est que votre préparation manque d'efficacité. Vous écoutez les corrections mais vous ne les retravaillez pas assez.

Partie 4 : Un ensemble de matrices

On considère l'ensemble des matrices dont le total de chaque ligne est constant :

$$F = \left\{ B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall i \in [\![1;3]\!],\ \sum_{j=1}^{3} b_{i,j} = \lambda \right\}.$$

12. Montrer proprement que $I_3 \in F$ et que $A \in F$.

    Pas mal de bonnes réponses, question pas trop dure dès que l'on a compris ce qu'était F.

13. On prend $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ deux matrices **quelconques** de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $C = AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$.

   (a) Rappeler la formule permettant de calculer $c_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1;3]\!]^2$.
   La cours ! ! ! Un point gratuit pour ceux qui le savent et 0 pour les trop nombreux autres...

   (b) En déduire que si $A \in F$ et $B \in F$ alors $AB \in F$.
   Question plus dure mais pas tant que cela et d'un niveau tout à fait dans l'esprit du concours, à retravailler donc.

Problème II - Analyse asymptotique

L'objectif du problème est d'établir de différentes façons le développement limité de la fonction $\varphi = \operatorname{argsh}$ la réciproque de la fonction sh sur $\mathbb{R}$.

Partie 1 : Echauffement

1. Préciser le développement limité à l'ordre 5 en 0 de e^x et de e^{-x}.

   Bien. Une petite ligne pour justifier e^{-x} à partir de e^x ne fait pas de mal.

2. En déduire le développement limité à l'ordre 5 de sh en 0.

   Bien traitée dans l'ensemble. Attention à ne pas parachuter le résultat puisque l'on demande « d'en déduire ».

3. **En utilisant le fait que** ch est une primitive de sh sur $\mathbb{R}$, déduire de la question précédente, le développement limité à l'ordre 5 en 0 de ch.

   Même remarque : il faut bien appliquer la méthode et ne pas juste parachuter le développement limité de ch que vous connaissez par coeur. La moitié des points pour faire apparaître $\operatorname{ch}(0)$ avant de le simplifier. Il est bon de d'abord donner le développement à l'ordre 6 que l'on obtient en intégrant celui du sh avant de le tronquer ensuite à l'ordre 5. Je n'ai pas enlevé de point sur ce sujet mais beaucoup ont parachuter le $o\left(x^5\right)$.

Partie 2 : Construction et propriétés de φ

4. Justifier que sh définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   Aïe ! ! ! Plusieurs bonnes réponses mais bien trop peu à mon goût alors qu'il s'agit simplement de réciter le théorème de la bijection... vu depuis septembre et déjà revu de nombreuses fois !

On note dans toute la suite $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la réciproque de la fonction sh.

5. Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = \varphi(y)$. Montrer que $\operatorname{sh}(-x) = -y$ puis en déduire que $\varphi(-y) = -\varphi(y)$. Que peut-on en conclure ?

   Bien dans l'ensemble. Plusieurs arnaques qui ne rapportent aucun point mais des réponses correctes autrement. Certains parlent même de $\mathbb{R}$ centré en 0 (je rappelle que c'est l'ensemble qui est centré et non la fonction).

6. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(y) = \frac{1}{\operatorname{ch} \circ \varphi(y)}.$$

   Re-aïe ! ! Et encore bien plus. Très très peu de bonnes réponses là où il suffit juste d'énoncer les hypothèses et le théorème associé.

7. Montrer à l'aide de la question précédente et par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, φ est $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

   Question un peu plus dure et non réussie. A bien retravailler avec le corrigé, la question est en réalité très abordable. Beaucoup de confusion sur le caractère $\mathscr{C}^n$ j'ai vu beaucoup de raisonnement complètement bizarre sur cette notion.

8. Justifier que φ admet un développement limité à l'ordre 5 en 0.

   Facile bien réussie. Ne restez pas vague sur le caractère $\mathscr{C}^k$ (mais qui est k ?) Précisez bien φ est $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc notamment $\mathscr{C}^5$ et ensuite on invoque le théorème de Taylor-Young pour dire que φ admet bien un développement limité (abréviation DL comme toute abréviation est interdite) à l'ordre 5.

9. Justifier que son développement limité s'écrit sous la forme suivante :

$$(\bigstar) \qquad \varphi(y) \underset{y\to 0}{=} a_1 y + a_3 y^3 + a_5 y^5 + o\left(y^5\right),$$

où a_1, a_3 et a_5 sont trois coefficients que l'on déterminera dans les parties suivantes.

Bien réussie aussi.

Partie 3 : Méthode 1

10. Pour tout $k \in [\![2;5]\!]$, calculer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\mathrm{sh}^k(x)$.

Quelques-uns se sont embrouillés avec $\mathrm{sh}^{(k)}$. Pas mal de bonnes réponses. Attention à ne pas vouloir aller trop vite, d'une part pour bien justifier ses calculs et d'autres part pour ne pas se tromper dans les calculs (ce qui arrive encore).

11. A l'aide de $(\bigstar)$, en déduire le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\varphi \circ \mathrm{sh}(x)$ en fonction de a_1, a_3 et a_5.

La moitié des points pratiquement sur la justification que $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et l'autre moitié des points pratiquement pour la justification de $o\left(\mathrm{sh}(x)^5\right)$.

12. En utilisant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi \circ \mathrm{sh}(x) = x$, en déduire les coefficients a_1, a_3 et a_5 puis écrire le développement limité de φ à l'ordre 5 en 0.

Bien entendu « l'unicité du développement limité » était attendue. Plusieurs bonnes réponses.

13. Justifier que φ' admet un développement limité à l'ordre 4 en 0 et le déduire de la question précédente.

Une petite poignée de bonnes réponses. Question pourtant identique à des questions d'interrogation d'entrainement et du DM.

Partie 4 : Méthode 2

On donne pour la suite

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(y) = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$$

14. Retrouver le développement limité à l'ordre 5 en 0 de φ.

Question longue et calculatoire mais sans difficulté autre. Un nombre raisonnable de bonnes réponses mais aussi des difficultés calculatoires pour d'autres.

Partie 5 : Applications

15. Préciser avec le moins de calculs possibles la valeur de $\varphi^{(5)}(0)$.

Pas très difficile mais peu réussie. On donne d'abord bien le développement limité selon la formule de Taylor-Young PUIS on invoque l'unicité du développement limité.

16. Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(x)}$. Déterminer si $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f possède une asymptote en $+\infty$ et si c'est le cas, déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Pratiquement personne n'a remarqué que $\mathrm{e}^{\varphi(x)} = x + \sqrt{1x^2}$ d'après la partie précédente ce qui rendait la question très abordable. Beaucoup sont partis sur le comportement en 0 !

17. Déterminer la limite en 0 de $g : x \mapsto \frac{\arctan(\varphi(x)) - \arctan(\sin(x))}{x(\varphi(x)^2 + 2\cos(x) - 2)}$.

Question longue de fin de problème mais n'hésitez pas à vous y confronter car les applications des développements limités sont des éléments importants.

Problème III - Ensembles et applications

Soit E un ensemble, $A \in \mathscr{P}(E)$ un sous-ensemble de E et f l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ F & \mapsto & f(F) = F \cup A. \end{array}$$

Exercice très peu traité souvent par manque de temps. Les questions sont d'un niveau raisonnable. A retravailler calmement.

1. On suppose que $A = \emptyset$. Montrer alors que f est bijective et préciser f^{-1}.

   Quelques bonnes réponses. J'ai mis un soupçon de point à ceux qui m'écrivait que $f(F) = F$. Quelques-uns sont partis dans de grandes considérations en ne comprenant pas ce qu'est f. Notamment il y a beaucoup de confusions entre $f(F)$ et $f(x)$ pour $x \in E$ (ou F). La fonction f n'est définie que sur $\mathscr{P}(E)$ et non sur E. En conséquence, $f(x)$ n'a aucun sens pour $x \in E$ ou F. f mange des ensembles et non des éléments.

2. On suppose que $A \neq \emptyset$. Alors, on note $x_A \in A$ un élément fixé de A.

   (a) A l'aide des ensembles $F_1 = \{x_A\}$ et $F_2 = \emptyset$, montrer que f n'est pas injective.
   Peu de réponses. Les mêmes confusions que dans la question précédente. Quelques bonnes réponses cependant.

   (b) A l'aide de l'ensemble $F_3 = E \setminus \{x_A\}$, montrer que f n'est pas surjective non plus.
   Une ou deux bonnes réponses. Non traitée sinon.