Corrigé du Devoir Surveillé 5
Matrices, Analyse asymptotique, Ensembles et applications

Problème I - Matrices

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie 1 : Par la division euclidienne

1. On a le produit matriciel suivant :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.}$$

2. Par la question précédente, on observe directement que

$$\boxed{A^2 = A + 2I_3.}$$

3. Par la question précédente, on a

$$A^2 - A = 2I_3 \qquad \Leftrightarrow \qquad A\left(A - I_3\right) = 2I_3 \qquad \Leftrightarrow \qquad A\frac{A - I_3}{2} = I_3.$$

On en déduit donc directement que

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{A - I_3}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

On pose $P = X^2 - X - 2$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème de la division euclidienne, il existe Q_n et R_n deux polynômes tels que

$$X^n = Q_n P + R_n.$$

De plus, $\deg\left(R_n\right) < \deg\left(P\right) = 2$ donc $\deg\left(R_n\right) \leqslant 1$ i.e. il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R_n = a_n X + b_n$. Donc

$$X^n = Q_n\left(X^2 - X - 2\right) + a_n X + b_n.$$

On note que -1 est une racine de P : $(-1)^2-(-1)-2=1+1-2=0$. Donc $P=(X+1)(X-2)$. On évalue donc l'égalité polynomiale précédente en -1 et 2 :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}(-1)^n = Q_n(-1)P(-1) - a_n + b_n \\ 2^n = Q_n(2)P(2) + 2a_n + b_n\end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad &\begin{cases}(-1)^n = -a_n + b_n \\ 2^n = 2a_n + b_n\end{cases} \qquad \text{car } P_n(-1)=P_n(2)=0 \\
\Leftrightarrow\quad &\begin{cases}(-1)^n = -a_n + b_n \\ 2^n-(-1)^n = 3a_n\end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
\Leftrightarrow\quad &\begin{cases}b_n = (-1)^n + a_n = \frac{2^n+2(-1)^n}{3} \\ a_n = \frac{2^n-(-1)^n}{3}\end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad R_n = \frac{2^n-(-1)^n}{3}X + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $X^n = Q_nP + R_n$. Donc en évaluant cette égalité polynomiale en A, on obtient :

$$\begin{aligned}
A^n &= Q_n(A)\left(A^2 - A - 2I_3\right) + R_n(A) \\
&= Q_n(A) \times O_3 + R_n(A) && \text{par la question 2.} \\
&= R_n(A) \\
&= \frac{2^n-(-1)^n}{3}A + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}I_3 && \text{par la question précédente.}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \frac{2^n-(-1)^n}{3}A + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}I_3.}$$

On vérifie son résultat pour $n=0$, on a bien

$$\frac{2^n-(-1)^n}{3}A + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}I_3 = 0 + \frac{1+2}{3}I_3 = I_3.$$

Pour $n=1$,

$$\frac{2^n-(-1)^n}{3}A + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}I_3 = \frac{2+1}{3}A = A.$$

Pour $n=2$,

$$\frac{2^n-(-1)^n}{3}A + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}I_3 = \frac{4-1}{3}A + \frac{4+2}{3}I_3 = A + 2I_3.$$

OK !

Partie 2 : Par diagonalisation

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan. On a les opérations élémentaires suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow -\tfrac{1}{3} L_3 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Puisque $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, on en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$ et par ce qui précède, on a

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Vérification,

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = I_3 \ \textit{OK!}$$

7. On a les égalités matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &= P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

8. On montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

D'autre part, on a $D = P^{-1}AP$ donc $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$. Dès lors, par récurrence, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}.$$

Donc pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n & (-1)^n \\ -2^n & -2^n & 2^{n+1} \\ -2^n & 2^{n+1} & -2^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n+1} & (-1)^n - 2^n & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^n + 2^{n+1} & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^n - 2^n & (-1)^n + 2^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n+1} & (-1)^n - 2^n & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^n + 2^{n+1} & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^n - 2^n & (-1)^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}.}$$

On retrouve bien le résultat de la question 5.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = -\frac{(-1)^n - 2^n}{A} + \frac{(-1)^n + 2^{n+1} + (-1)^n - 2^n}{3} I_3 = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2 \times (-1)^n + 2^n}{3} I_3.$$

Partie 3 : Par la formule de Newton

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Comme dans l'interrogation 12, on a les égalités matricielles suivants :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J.$$

Puis,

$$J^3 = J \times J^2 = J \times (3J) = 3J^2 = 3 \times (3J) = 9J.$$

On intuite le résultat suivant $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 3^{n-1}J$. Procédons par récurrence. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: « $J^n = 3^{n-1}J$ ».

Initialisation. Si $n = 1$. Alors,

$$3^{1-1}J = J = J^1.$$

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie i.e. $J^n = 3^{n-1}J$. Par suite,

$$\begin{aligned} J^{n+1} = J^n \times J = 3^{n-1}J \times J = 3^{n-1}J^2 &= 3^{n-1} \times 3J \qquad \text{par ce qui précède} \\ &= 3^nJ. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad J^k = \begin{cases} I_3 \text{ si } n = 0 \\ 3^{k-1} J = 3^{k-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ si } k \geqslant 1 \end{cases} .}$$

10. On observe que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -J + 2I_3.$$

Conclusion,

$$\boxed{A = 2I_3 - J.}$$

11. Puisque les matrices I_3 et J COMMUTENT, par la formule du binôme de Newton, on a

$$A^n = (2I_3 - J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k J^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} J_k.$$

Par la question précédente, pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} A^n &= 2^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} J^k \\ &= 2^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} 3^{k-1} J \\ &= 2^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-3)^k \right) \frac{J}{3} \\ &= 2^n I_3 + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-3)^k - 2^n \right) \frac{J}{3} \\ &= 2^n I_3 + ((2-3)^n - 2^n) \frac{J}{3} \\ &= 2^n I_3 + \frac{(-1)^n - 2^n}{3} J. \end{aligned}$$

On note que la formule reste encore vraie si $n = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = 2^n I_3 + \frac{(-1)^n - 2^n}{3} J.}$$

Puisque $A = 2I_3 - J$, on a aussi $J = 2I_3 - A$ donc

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n &= 2^n I_3 + \frac{(-1)^n - 2^n}{3} (2I_3 - A) \\ &= \frac{2(-1)^n + (3-2) 2^n}{3} I_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} A \\ &= \frac{2(-1)^n + 2^n}{3} I_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} A. \end{aligned}$$

Ce qui est bien cohérent avec la question 5.

Partie 4 : Un ensemble de matrices

On considère l'ensemble des matrices dont le total de chaque ligne constant :

$$F = \left\{ B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; \exists\,\lambda \in \mathbb{R},\ \forall i \in [\![1;3]\!],\ \sum_{j=1}^{3} b_{i,j} = \lambda \right\}.$$

12. On sait que $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$. Donc dans ce cas, pour $i = 1$,

$$\sum_{j=1}^{3} b_{i,j} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Puis si $i = 2$,

$$\sum_{j=1}^{3} b_{i,j} = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Et pour $i = 3$,

$$\sum_{j=1}^{3} b_{i,j} = 0 + 0 + 1 = 1.$$

Conclusion, avec $\lambda = 1$, on a bien

$$\boxed{I_3 \in F.}$$

Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$, on a

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3} a_{1,j} = 1 - 1 - 1 = -1 \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2,j} = -1 + 1 - 1 = -1 \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3,j} = -1 - 1 + 1 = -1. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{A \in F.}$$

13. On prend $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ deux matrices **quelconques** de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $C = AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$.

   (a) Soit $(i,j) \in [\![1;3]\!]^2$, par la formule du produit matriciel,

$$\boxed{c_{i,j} = \sum_{k=1}^{3} a_{i,k} b_{k,j}.}$$

   (b) Supposons $A \in F$ et $B \in F$. Montrons que $C = AB \in F$. Soit $i \in [\![1;3]\!]$. On a par la question précédente,

$$\sum_{j=1}^{3} c_{i,j} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_{i,k} b_{k,j}.$$

   On intervertit les deux sommes (la somme double est rectangulaire) :

$$\sum_{j=1}^{3} c_{i,j} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{3} a_{i,k} \sum_{j=1}^{3} b_{k,j}.$$

   Puisque $B \in F$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in [\![1;3]\!]$, $\sum_{j=1}^{3} b_{k,j} = \lambda$. Donc pour tout $i \in [\![1;3]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{3} c_{i,j} = \sum_{k=1}^{3} a_{i,k} \underbrace{\lambda}_{\text{indépendant de } k} = \lambda \sum_{k=1}^{3} a_{i,k}.$$

De même $A \in F$ donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $i \in [\![1;3]\!]$, $\sum_{k=1}^{3} a_{i,k} = \mu$. Donc

$$\forall i \in [\![1;3]\!], \qquad \sum_{j=1}^{3} c_{i,j} = \lambda\,\mu.$$

Ceci étant vrai pour tout $i \in [\![1;3]\!]$, on en déduit que $C \in F$. Conclusion,

$$\boxed{(A \in F \ \text{ ET }\ B \in F) \quad \Rightarrow \quad (AB \in F)\,.}$$

Problème II - Analyse asymptotique

L'objectif du problème est d'établir de différentes façons le développement limité de la fonction $\varphi = \operatorname{argsh}$ la réciproque de la fonction sh sur $\mathbb{R}$.

Partie 1 : Echauffement

1. Par le cours, on a

$$\boxed{\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right).}$$

Posons $u = -x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\boxed{\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right).}$$

2. Par les deux résultats précédents, on a directement,

$$\boxed{\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right).}$$

3. La fonction sh possède un développement limité à l'ordre 5 en 0 et ch est une primitive de sh sur $\mathbb{R}$ (voisinage de 0). Donc par le théorème de primitivation des développements limités, on a

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{ch}(0) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\times 6} + \frac{x^6}{6\times 120} + o\left(x^6\right).$$

Or $\frac{x^6}{6\times 120} + o\left(x^6\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right)$ et $\mathrm{ch}(0) = 1$. Donc

$$\boxed{\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right).}$$

Partie 2 : Construction et propriétés de φ

4. On sait que la fonction sh est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc par le théorème de la bijection sh définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x); \lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x)[= \mathbb{R}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction sh définit une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$$

Sa réciproque est notamment continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On note dans toute la suite $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la réciproque de la fonction sh.

5. Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = \varphi(y)$. On a

$$\operatorname{sh}(-x) = \operatorname{sh}(-\varphi(y)) = -\operatorname{sh}(\varphi(y))$$

car la fonction sh est impaire. Or $\operatorname{sh} \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Donc

$$\boxed{\operatorname{sh}(-x) = -y.}$$

Donc en composant par φ :

$$\varphi(\operatorname{sh}(-x)) = \varphi(-y).$$

Or on a aussi $\varphi \circ \operatorname{sh} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ donc

$$-x = \varphi(-y) \qquad \Leftrightarrow \qquad -\varphi(y) = \varphi(-y) \qquad\qquad \text{par définition de } x.$$

Donc

$$\boxed{\varphi(-y) = -\varphi(y).}$$

L'ensemble $\mathbb{R}$ est centré en 0 et pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\varphi(-y) = -\varphi(y)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est impaire.}}$$

6. On a

- sh est dérivable sur $\mathbb{R}$,
- sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x) > 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}'(x) \neq 0$.

Donc par le théorème de la dérivée de la réciproque, on en déduit que φ est dérivable sur $\operatorname{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et de plus,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(y) = \frac{1}{\operatorname{sh}' \circ \varphi(y)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\varphi(y))}.$$

Conclusion, $\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(y) = \frac{1}{\operatorname{ch} \circ \varphi(y)}.}$$

7. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$: « φ est $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ ». Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $k = 0$. Alors, par la question précédente, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc notamment continue sur $\mathbb{R}$. Donc φ est $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. Alors φ est $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$. De plus, ch est aussi $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ donc $\operatorname{ch} \circ \varphi$ est $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \neq 0$. Donc $\frac{1}{\operatorname{ch} \circ \varphi}$ est $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$. Par la question précédente, on en déduit que φ' est $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ donc φ est $\mathscr{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}$ i.e. $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \varphi \text{ est } \mathscr{C}^k \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

8. Par la question précédente, pour $k = 5$, on en déduit que φ est $\mathscr{C}^5$ sur $\mathbb{R}$ (voisinage de 0). Donc par la formule de Taylor-Young, on en déduit que

$$\boxed{\varphi \text{ admet un développement limité à l'ordre 5 en 0.}}$$

9. Par la question précédente, il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^6$ tel que

$$\varphi(y) \underset{y\to 0}{=} \sum_{k=0}^{5} a_k y^k + o\left(y^5\right).$$

Or d'après la question 5. φ est impaire. Donc

$$a_0 = a_2 = a_4 = 0.$$

Conclusion, on a bien

$$\boxed{(\bigstar) \qquad \varphi(y) \underset{y\to 0}{=} a_1 y + a_3 y^3 + a_5 y^5 + o\left(y^5\right).}$$

Partie 3 : Méthode 1

10. On a vu que

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)\left(x + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x^2 \quad + \tfrac{x^4}{6} \quad + o\left(x^5\right) \\
&\qquad\quad + \tfrac{x^4}{6} \quad + o\left(x^5\right) \\
&\qquad\qquad\qquad + o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x^2 + \tfrac{x^4}{3} + o\left(x^5\right) \quad .
\end{aligned}$$

Puis, de même

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(x)^3 &\underset{x\to 0}{=} \left(x + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)\left(x^2 + \tfrac{x^4}{3} + o\left(x^5\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x^3 \quad + \tfrac{x^5}{3} \quad + o\left(x^5\right) \\
&\qquad\quad + \tfrac{x^5}{6} \quad + o\left(x^5\right) \\
&\qquad\qquad\qquad + o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x^3 + \tfrac{x^5}{2} + o\left(x^5\right) \quad .
\end{aligned}$$

Encore,

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(x)^4 &\underset{x\to 0}{=} \left(x^2 + \tfrac{x^4}{3} + o\left(x^5\right)\right)\left(x^2 + \tfrac{x^4}{3} + o\left(x^5\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x^4 \quad + o\left(x^5\right) \\
&\qquad\quad + o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x^4 + o\left(x^5\right) \quad .
\end{aligned}$$

Enfin, puisque $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on en déduit que $\mathrm{sh}(x)^5 \underset{x\to 0}{\sim} x^5$ i.e. $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x^5 + o\left(x^5\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{sh}^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^5\right)}$$

$$\boxed{\mathrm{sh}^3(x) \underset{x\to 0}{=} x^3 + \frac{x^5}{2} + o\left(x^5\right)}$$

$$\boxed{\mathrm{sh}^4(x) \underset{x\to 0}{=} x^4 + o\left(x^5\right)}$$

$$\boxed{\mathrm{sh}^5(x) \underset{x\to 0}{=} x^5 + o\left(x^5\right).}$$

11. Par ($\bigstar$), on sait que
$$\varphi(u) \underset{u\to 0}{=} a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5 + o\left(u^5\right).$$
Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} \operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right) \underset{x\mapsto 0}{\longrightarrow} 0$. De plus, par la question précédente,

- $u(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)$.
- Et,
$$u(x)^3 \underset{x\to 0}{=} x^3 + \frac{x^5}{2} + o\left(x^5\right).$$
- Aussi,
$$u(x)^5 \underset{x\to 0}{=} x^5 + o\left(x^5\right).$$
- Enfin,
$$o\left(u(x)^5\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^5 + o\left(x^5\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right).$$

Donc
$$\begin{aligned}
\varphi\circ\operatorname{sh}(x) = \varphi(u(x)) &\underset{x\to 0}{=} a_1 u(x) + a_3 u(x)^3 + a_5 u(x)^5 + o\left(u(x)^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} a_1 x \quad + a_1\tfrac{x^3}{6} \quad + a_1\tfrac{x^5}{120} \quad + o\left(x^5\right) \\
&\qquad\quad + a_3 x^3 \quad + a_3\tfrac{x^5}{2} \quad + o\left(x^5\right) \\
&\qquad\qquad\qquad + a_5 x^5 \quad + o\left(x^5\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} a_1 x + \left(a_3 + \tfrac{a_1}{6}\right)x^3 + \left(a_5 + \tfrac{a_3}{2} + \tfrac{a_1}{120}\right)x^5 + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\varphi\circ\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} a_1 x + \left(a_3 + \frac{a_1}{6}\right)x^3 + \left(a_5 + \frac{a_3}{2} + \frac{a_1}{120}\right)x^5 + o\left(x^5\right).}$$

12. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi\circ\operatorname{sh}(x) = x$. Donc par la question précédente,
$$a_1 x + \left(a_3 + \frac{a_1}{6}\right) + \left(a_5 + \frac{a_3}{2} + \frac{a_1}{120}\right)x^5 + o\left(x^5\right) \underset{x\to 0}{=} x \underset{x\to 0}{=} x + o\left(x^5\right).$$
Par unicité d'un développement limité, on en déduit que
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 + \frac{a_1}{6} = 0 \\ a_5 + \frac{a_3}{2} + \frac{a_1}{120} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = -\frac{a_1}{6} = -\frac{1}{6} \\ a_5 = -\frac{a_3}{2} - \frac{a_1}{120} = \frac{1}{12} - \frac{1}{120} = \frac{9}{120} = \frac{3}{40}. \end{cases}$$
Conclusion, $\boxed{a_1 = 1}$, $\boxed{a_3 = -\frac{1}{6}}$ et $\boxed{a_5 = \frac{3}{40}}$ et donc
$$\boxed{\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right).}$$

13. Par la question 7. φ est $\mathscr{C}^5$ sur $\mathbb{R}$ donc notamment dérivable et φ' est $\mathscr{C}^4$ sur $\mathbb{R}$ donc en 0. Donc par le théorème de Taylor-Young,
$$\boxed{\varphi' \text{ admet un développement limité à l'ordre 4 en 0.}}$$
Ainsi, il existe $(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^5$ tel que
$$\varphi'(x) \underset{x\to 0}{=} b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + o\left(x^4\right).$$

Or φ est une primitive de φ' sur $\mathbb{R}$ donc par le théorème de primitivation des développements limités,

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} \varphi(0) + b_0 x + \frac{b_1}{2}x^2 + \frac{b_2}{3}x^3 + \frac{b_3}{4}x^4 + \frac{b_4}{5}x^5 + o\left(x^5\right).$$

Or par la question précédente,

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right).$$

Donc par unicité du développement limité,

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ b_0 = 1 \\ \frac{b_1}{2} = 0 = \frac{b_3}{4} \\ \frac{b_2}{3} = -\frac{1}{6} \\ \frac{b_4}{5} = \frac{3}{40} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = b_3 = 0 \\ b_2 = -\frac{1}{2} \\ b_4 = \frac{3}{8}. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi'(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o\left(x^4\right).}$$

Partie 4 : Méthode 2

On donne pour la suite

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(y) = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$$

14. On sait que $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}u^2 + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{6}u^3 + o\left(u^3\right)$. Posons $u(y) = y^2 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$. Alors,

$$\sqrt{1+y^2} \underset{y\to 0}{=} 1 + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{8} + \frac{y^6}{16} + o\left(y^6\right) \underset{y\to 0}{=} 1 + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{8} + o\left(y^5\right).$$

Par suite,

$$y + \sqrt{1+y^2} \underset{y\to 0}{=} 1 + y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{8} + o\left(y^5\right).$$

Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o\left(u^4\right)$. Posons $u(y) \underset{y\to 0}{=} y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{8} + o\left(y^5\right) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$. Alors,

- $u(y) \underset{y\to 0}{=} y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{8} + o\left(y^5\right)$.
- Puis,

$$\begin{aligned} u(y)^2 &\underset{y\to 0}{=} \left(y + \tfrac{y^2}{2} - \tfrac{y^4}{8} + o\left(y^5\right)\right)\left(y + \tfrac{y^2}{2} - \tfrac{y^4}{8} + o\left(y^5\right)\right) \\ &\underset{y\to 0}{=} y^2 + \tfrac{y^3}{2} - \tfrac{y^5}{8} + o\left(y^5\right) \\ &\qquad + \tfrac{y^3}{2} + \tfrac{y^4}{4} + o\left(y^5\right) \\ &\qquad - \tfrac{y^5}{8} + o\left(y^5\right) \\ &\qquad + o\left(y^5\right) \\ &\underset{y\to 0}{=} y^2 + y^3 + \tfrac{y^4}{4} - \tfrac{y^5}{4} + o\left(y^5\right) \end{aligned}$$

- Poursuivons,

$$\begin{aligned}
u(y)^3 &\underset{y\to 0}{=} \left(y+\tfrac{y^2}{2}-\tfrac{y^4}{8}+o\left(y^5\right)\right)\left(y^2+y^3+\tfrac{y^4}{4}-\tfrac{y^5}{4}+o\left(y^5\right)\right)\\
&\underset{y\to 0}{=} \begin{array}{llll} y^3 & +y^4 & +\tfrac{y^5}{4} & +o\left(y^5\right)\\ & +\tfrac{y^4}{2} & +\tfrac{y^5}{2} & +o\left(y^5\right)\\ & & & +o\left(y^5\right)\end{array}\\
&\underset{y\to 0}{=} y^3+\tfrac{3y^4}{2}+\tfrac{3y^5}{4}+o\left(y^5\right)
\end{aligned}$$

- Aussi,

$$\begin{aligned}
u(y)^4 &\underset{y\to 0}{=} \left(y^2+y^3+\tfrac{y^4}{4}-\tfrac{y^5}{4}+o\left(y^5\right)\right)\left(y^2+y^3+\tfrac{y^4}{4}-\tfrac{y^5}{4}+o\left(y^5\right)\right)\\
&\underset{y\to 0}{=} \begin{array}{lll} y^4 & +y^5 & +o\left(y^5\right)\\ & +y^5 & +o\left(y^5\right)\\ & & +o\left(y^5\right)\end{array}\\
&\underset{y\to 0}{=} y^4+2y^5+o\left(y^5\right)
\end{aligned}$$

- Comme $u(y) \underset{y\to 0}{\sim} y$, on en déduit que $u(y) \underset{y\to 0}{\sim} y^5$ i.e. $u(y)^5 \underset{y\to 0}{=} y^5+o\left(y^5\right)$.
- Enfin,

$$o\left(u(y)^5\right) \underset{y\to 0}{=} o\left(y^5+o\left(y^5\right)\right) \underset{y\to 0}{=} o\left(y^5\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\varphi(y) &\underset{y\to 0}{=} u(y)-\tfrac{u(y)^2}{2}+\tfrac{u(y)^3}{3}-\tfrac{u(y)^4}{4}+\tfrac{u(y)^5}{5}+o\left(u(y)^5\right)\\
&\underset{y\to 0}{=} \begin{array}{llllll} y & +\tfrac{y^2}{2} & & -\tfrac{y^4}{8} & & +o\left(y^5\right)\\ & -\tfrac{y^2}{2} & -\tfrac{y^3}{2} & -\tfrac{y^4}{8} & +\tfrac{y^5}{8} & +o\left(y^5\right)\\ & & +\tfrac{y^3}{3} & +\tfrac{y^4}{2} & +\tfrac{y^5}{4} & +o\left(y^5\right)\\ & & & -\tfrac{y^4}{4} & -\tfrac{y^5}{2} & +o\left(y^5\right)\\ & & & & +\tfrac{y^5}{5} & +o\left(y^5\right)\\ & & & & & +o\left(y^5\right)\end{array}\\
&\underset{y\to 0}{=} y-\tfrac{y^3}{6}+\tfrac{3y^5}{40}+o\left(y^5\right)
\end{aligned}$$

Incroyable!! On retrouve bien le résultat précédent,

$$\boxed{\varphi(y) \underset{y\to 0}{=} y-\frac{y^3}{6}+\frac{3y^5}{40}+o\left(y^5\right).}$$

Partie 5 : Applications

15. Par la question précédente,

$$\varphi(y) \underset{y\to 0}{=} y-\frac{y^3}{6}+\frac{3y^5}{40}+o\left(y^5\right).$$

De plus, on sait que φ est $\mathscr{C}^5$ en 0 donc par le théorème de Taylor-Young, on a

$$\varphi(y) \underset{y\to 0}{=} \sum_{k=0}^{5} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} y^k+o\left(y^5\right).$$

Donc par unicité du développement limité, on a notamment

$$\frac{3}{40} = \frac{\varphi^{(5)}(0)}{5!} \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi^{(5)}(0) = \frac{3}{40} \times 120 = 9.$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi^{(5)}(0) = 9.}$$

16. Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(x)}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \mathrm{e}^{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} = x + \sqrt{1+x^2}.$$

Donc pour tout $x > 0$,

$$f(x) = x + \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = x + x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \qquad \text{car } x > 0.$$

Or $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} + o(u)$. Donc en posant $u = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} x + x\left(1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 2x + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{f \text{ admet une asymptote en } +\infty \text{ d'équation } y = 2x.}$$

De plus, on a

$$f(x) - 2x \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

Or pour tout $x > 0$, $\frac{1}{2x} > 0$ et deux équivalents ont même signe au voisinage considéré. Donc au voisinage de $+\infty$, $f(x) - 2x > 0$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ se trouve au-dessus de son asymptote au voisinage de } +\infty.}$$

17. Soit $g : x \mapsto \frac{\arctan(\varphi(x)) - \arctan(\sin(x))}{x(\varphi(x)^2 - 2\cos(x) + 2)}$. Cherchons un équivalent du numérateur et un équivalent du dénominateur.

Pour le numérateur, on sait que

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right).$$

De plus,

$$\arctan(u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + o\left(u^5\right).$$

Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} \varphi(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right)$.
- Puis,

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right)\right)\left(x - \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 \quad -\tfrac{x^4}{6} \quad + o\left(x^5\right) \\ &\qquad\qquad -\tfrac{x^4}{6} \quad + o\left(x^5\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\quad + o\left(x^5\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 - \tfrac{x^4}{3} + o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

- De même,

$$\begin{aligned} u(x)^3 &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right)\right)\left(x^2 - \tfrac{x^4}{3} + o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^3 \quad -\tfrac{x^5}{3} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\quad -\tfrac{x^5}{6} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\qquad\qquad +o\left(x^5\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^3 - \tfrac{x^5}{2} + o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

- Puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on en déduit que $u(x)^5 \underset{x\to 0}{\sim} x^5$ i.e. $u(x)^5 \underset{x\to 0}{=} x^5 + o\left(x^5\right)$.
- Enfin,

$$o\left(u(x)^5\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^5 + o\left(x^5\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \arctan\left(\varphi(x)\right) &\underset{x\to 0}{=} u(x) - \tfrac{u(x)^3}{3} + \tfrac{u(x)^5}{5} + o\left(u(x)^5\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x \quad -\tfrac{x^3}{6} \quad +\tfrac{3x^5}{40} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\quad -\tfrac{x^3}{3} \quad +\tfrac{x^5}{6} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\qquad\qquad +\tfrac{x^5}{5} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad +o\left(x^5\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x - \tfrac{x^3}{2} + \tfrac{9+20+24}{120}x^5 + o\left(x^5\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x - \tfrac{x^3}{2} + \tfrac{53}{120}x^5 + o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right).$$

Posons cette fois $u(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Alors, de même,

- $u(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)$.
- Puis,

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)\left(x - \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 \quad -\tfrac{x^4}{6} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\quad -\tfrac{x^4}{6} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\qquad\qquad +o\left(x^5\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 - \tfrac{x^4}{3} + o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

- Aussi,

$$\begin{aligned} u(x)^3 &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)\left(x^2 - \tfrac{x^4}{3} + o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^3 \quad -\tfrac{x^5}{3} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\quad -\tfrac{x^5}{6} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\qquad\qquad +o\left(x^5\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^3 - \tfrac{x^5}{2} + o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

- Puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on en déduit que $u(x)^5 \underset{x\to 0}{\sim} x^5$ i.e. $u(x)^5 \underset{x\to 0}{=} x^5 + o\left(x^5\right)$.

- Enfin,

$$o\left(u(x)^5\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^5 + o\left(x^5\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right).$$

On peut noter que comparativement au développement de $\arctan(\varphi(x))$*, seul le* $u(x)$ *change finalement tandis que le* $u(x)^3$ *et* $u(x)^5$ *sont identiques (la différence étant absorbée par le* $o\left(x^5\right)$*).*

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\arctan(\sin(x)) &\underset{x\to 0}{=} u(x) - \tfrac{u(x)^3}{3} + \tfrac{u(x)^5}{5} + o\left(u(x)^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x \quad -\tfrac{x^3}{6} \quad +\tfrac{x^5}{120} \quad +o\left(x^5\right) \\
&\qquad\quad -\tfrac{x^3}{3} \quad +\tfrac{x^5}{6} \quad +o\left(x^5\right) \\
&\qquad\qquad\qquad +\tfrac{x^5}{5} \quad +o\left(x^5\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - \tfrac{x^3}{2} + \tfrac{1+20+24}{120}x^5 + o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - \tfrac{x^3}{2} + \tfrac{45}{120}x^5 + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\arctan(\varphi(x)) - \arctan(\sin(x)) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{2} + \frac{53}{120}x^5 + o\left(x^5\right) - \left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{45}{120}x^5 + o\left(x^5\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{8x^5}{120} + o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{15} + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\arctan(\varphi(x)) - \arctan(\sin(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^5}{15}.$$

Pour le dénominateur, on a déjà vu que

$$\varphi(x)^2 \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + o\left(x^5\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\varphi(x)^2 + 2\cos(x) - 2 &\underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + o\left(x^5\right) + 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)\right) - 2 \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{-8+1}{24}x^4 + o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{7}{24}x^4 + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi(x)^2 + 2\cos(x) - 2 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{7}{24}x^4.$$

Donc

$$x\left(\varphi(x)^2 + 2\cos(x) - 2\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{7}{24}x^5.$$

Par quotient,

$$g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^5}{15}}{-\frac{7}{24}x^5} = -\frac{24}{7\times 15} = -\frac{8}{7\times 5} = -\frac{8}{35}.$$

Or deux équivalents ont la même limite, conclusion, après ce petit calcul, on trouve :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = -\frac{8}{35}.}$$

Problème III - Ensembles et applications

Soit E un ensemble, $A \in \mathscr{P}(E)$ un sous-ensemble de E et f l'application suivante :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ F & \mapsto & f(F) = F \cup A. \end{array}$$

1. On suppose que $A = \emptyset$. Alors pour tout $F \in \mathscr{P}(E)$, on a

$$f(F) = F \cup A = F \cup \emptyset = F.$$

Donc $f = \mathrm{Id}_E$. Ainsi f est bijective et $f^{-1} = f = \mathrm{Id}_E$: en effet

$$\forall F \in \mathscr{P}(E), \qquad f \circ f(F) = f(F) = F.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Si } A = \emptyset,\ f = \mathrm{Id}_E \text{ est bijective et } f^{-1} = f = \mathrm{Id}_E.}$$

2. On suppose que $A \neq \emptyset$. Alors, on note $x_A \in A$ un élément fixé de A.

(a) Soient $F_1 = \{x_A\}$ et $F_2 = \emptyset$. On a

$$f(F_1) = F_1 \cup A = \{x_A\} \cup A.$$

Or $x_A \in A$ donc $\{x_A\} \subseteq A$ et par suite $\{x_A\} \cup A = A$. D'autre part,

$$f(F_2) = F_2 \cup A = \emptyset \cup A = A.$$

Donc $f(F_1) = f(F_2)$. Supposons f injective. Alors, on en déduit que $F_1 = F_2$ i.e. $\{x_A\} = \emptyset$ ce qui est impossible. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ n'est pas injective.}}$$

(b) Posons $F_3 = E \setminus \{x_A\}$. Procédons par l'absurde, supposons que f est surjective. Puisque $F_3 \in \mathscr{P}(E)$ alors il existe $F_4 \in \mathscr{P}(E)$ tel que

$$F_3 = f(F_4) = F_4 \cup A.$$

En particulier, $A \subseteq F_4 \cup A = F_3$. Or $x_A \in A$ donc $x_A \in F_3 = E \setminus \{x_A\}$ ce qui est impossible. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ n'est pas sujective.}}$$