Epreuve de mathématiques 6
2022-2023

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Partie 0 : Préliminaire

On appelle cotangente, notée cotan la fonction définie lorsque c'est possible par $\text{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de cotan.
2. Justifier que les fonctions cotan et $\frac{1}{\tan}$ ne sont pas égales partout.
3. Montrer que cotan définit une bijection sur $]0;\pi[$ dans un ensemble que l'on précisera et tracer l'allure de son graphe sur $]0;\pi[$.

Problème 1 - Continuité-dérivabilité

Partie 1 : Etude d'une fonction

On définit

$$\varphi : \begin{array}{ccc}]-\pi;\pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \text{cotan}(x)\arctan(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que φ est continue sur $]-\pi;\pi[$.
2. Préciser la parité de φ.
3. Montrer que pour tout $x \in]-\pi;\pi[\setminus \{0\}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}\left(\frac{\sin(2x)}{2(1+x^2)} - \arctan(x)\right)$.
4. En déduire un équivalent simple de $\varphi'(x)$ quand x tend vers 0, $x \neq 0$.
5. Montrer que φ est $\mathscr{C}^1$ et préciser l'équation de sa tangente en 0.
6. Tracer l'allure du graphe de φ sur $]-\pi;\pi[$.

Partie 2 : Une fonction divergeant aux bords d'un intervalle borné

Soit f une fonction dérivable sur $]-\pi;\pi[$ telle que $\lim\limits_{x\to-\pi} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi} f(x) = -\infty$ et $f(0) = 1$.

7. Montrer qu'il existe $(a,b) \in]-\pi;0[\times]0;\pi[$, tel que $\forall x \in]-\pi;a] \cup [b;\pi[$, $f(x) \leqslant 0$.
8. Montrer que $[0;1] \subseteq f\left(]-\pi;\pi[\right)$.
9. Montrer que f admet un maximum sur $]-\pi;\pi[$.
10. On suppose que f' est bornée sur $[0;\pi[$: il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in [0;\pi[$, $|f'(x)| \leqslant M$.
    (a) Montrer que f est M-lipschitzienne sur $[0;\pi[$.
    (b) Conclure à une contradiction, que peut-on en déduire ?

Problème 2 - Suites numériques

Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1 : Une suite récurrente

On pose considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. Représenter le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur le graphique en annexe **à rendre avec la copie**.
2. Dresser le tableau de variation de $h : x \mapsto \arctan(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Partie 2 : Une suite implicite

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\arctan(x)}{x^n} \end{array}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
   (a) Déterminer le signe de $g_n : x \mapsto x - n\left(1 + x^2\right)\arctan(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) En déduire le tableau de variation de f_n sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, il existe un unique $x_n \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right]$ tel que $f_n(x_n) = 1$.
8. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est monotone.
9. En déduire que $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge et déterminer sa limite.

Problème 3 - Polynômes

L'objectif de ce problème est de calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ en utilisant un résultat obtenu grâce à des polynômes.

Partie 1 : Convergence de la série

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $T_n = S_n + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
2. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.
3. Montrer que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent.

Partie 2 : Une équation polynomiale

Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à déterminer tous les polynômes $R_n \in \mathbb{C}[X]$ solutions de l'équation

$$(E_n) \qquad\qquad (X-1)\,R_n' = nR_n.$$

On note $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des solutions de (E_n) dans $\mathbb{C}[X]$.

4. Montrer que $\mathscr{S}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.
5. Préciser $\mathscr{S}_0$.

On fixe désormais $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $R_n \in \mathscr{S}_n$. On suppose R_n non constant.

6. Quel théorème garantit l'existence d'une racine $a \in \mathbb{C}$ de R_n ?
   On fixe $a \in \mathbb{C}$ une racine de R_n. On note $p \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité.
7. Montrer que
$$nR_n^{(p-1)} = (X-1)\,R_n^{(p)} + (p-1)\,R_n^{(p-1)}.$$
8. En déduire que $a = 1$ puis la factorisation de R_n dans $\mathbb{C}$ en fonction de p et d'un coefficient $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
9. Montrer que $p = n$.
10. En conclure que $\mathscr{S}_n = \mathrm{Vect}\left((X-1)^n\right)$. *On pensera bien à justifier l'inclusion réciproque.*

Partie 3 : Factorisation des Q_n

On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, on note $\omega_k = \mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

11. Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$. Déterminer une relation entre ω_{n-k} et ω_k.

On pose $R_n = (X-1)^n$ et $Q_n = R_n\,(X+2) - R_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.

12. Préciser Q_2, Q_3 et Q_4.
13. Montrer que Q_n est de même parité que $n+1$.
14. A l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer le degré et le coefficient dominant de Q_n.

15. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$(z+1)^n - (z-1)^n = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z \in \{-i\,\omega_k \mid k \in [\![1;n-1]\!]\}.$$

16. A l'aide de la question 3. des préliminaires montrer que Q_n possède au moins $n-1$ racines distinctes.
17. Préciser la factorisation de Q_n dans $\mathbb{C}[X]$.
18. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En déduire la factorisation de Q_{2m+1} dans $\mathbb{R}[X]$.

Partie 4 : Racines de P_n

On considère toujours $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^k$.

19. Préciser P_2 et P_3.
20. (a) Soit $t \in \mathbb{C}$. Simplifier $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^{2k} t^{2n-2k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} X^{2k+1} t^{2n-2k}$.

    (b) En déduire que
$$Q_{2n+1}(X) = 2P_n\left(X^2\right).$$

21. En déduire que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $-\operatorname{cotan}^2\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$ sont des racines de P_n et qu'il n'y en a pas d'autre.
22. Rappeler les deux relations racines-coefficients pour un polynôme scindé quelconque.
23. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Partie 5 : Conséquence, conclusion, consécration

On admet que pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$
(ce qui se démontre par une simple étude de fonction).

24. En déduire que pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{cotan}^2(x) \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \operatorname{cotan}^2(x)$.
25. Soit $k \in [\![1;n]\!]$. En appliquant l'inégalité précédente à $\frac{k\pi}{2n+1}$, en déduire un encadrement de $\frac{1}{k^2}$.
26. En déduire un encadrement puis un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
27. Conclure en précisant $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

ANNEXE

Nom/Prénom :